量子力学A演習 解答例 （演習7）v1.4

1. 状態$|A>$で、ある観測可能な物理量Mを測定した場合、その対応する演算子$\hat{M}$の固有状態$\{|\lambda_i>\}$のどれかが観測されるのであるが、それぞれの観測される確率をすべて足し合わせた全確率が１になるためには$|A>$は規格化されている必要があることを示せ

（解答例） $|A>=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j|\lambda_j>$の時、状態が$|\lambda_j>$に収縮し、固有値$\lambda_j$が観測される確率を$P(\lambda_j)$とすると、

全確率は $\sum_{j=1}^{N}P_j(\lambda_j)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^*\alpha_j=\sum_{j=1}^{N}<A|\lambda_j><\lambda_j|A>=<A|(\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j><\lambda_j|)|A>=<A|A>.$

ここで、$\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j><\lambda_j|=\hat{I}$ を使った。よって、$\sum_{j=1}^{N}P_j(\lambda_j)=1$ （全確率が１）のためには、$<A|A>=1$ （規格化）の必要がある。

2. $\hat{U}(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$の時、$\hat{U}^\dagger(t)$ を求め、$\hat{U}(t)$がユニタリー演算子であることを示せ

（解答例） $\hat{H}$ はエルミート演算子なので、$\hat{U}^\dagger(t)=e^{i\frac{\hat{H}^\dagger}{\hbar}t}=e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}.$　$\hat{U}\hat{U}^\dagger(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}=\hat{I}$. よって、$\hat{U}(t)$はユニタリー演算子.

3. 有限時間の時間発展演算子　$\hat{U}(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ (3.7.16)式を使いスピン状態の時間変化に関する問題を解いてみよう。
今、z軸方向に向いた一様な静磁場(B_z)中に１つの電子スピンがあったとする。電子スピンは磁気モーメントを持つので、$\sigma_z=+1$の時（磁場にスピンが平行の時）はエネルギーE が高く、$\sigma_z=-1$の時（磁場にスピンが反平行の時）はEが低くなる。また、Eは磁場の大きさにも比例するので、電子スピンのエネルギーに対応する演算子、ハミルトニアン$\hat{H}$ は B_z と $\hat{\sigma}_z$ の積（B_z は $\hat{\sigma}_z$ にかかるただの数となる）で書ける。すなわち、　$\hat{H}\propto B_z\hat{\sigma}_z$.

この時、比例定数とB_zの積を、後で式が見やすくなるように$\frac{\hbar}{2}\omega$ と書くことにすると、$\hat{H}$は次のようになる。

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z \qquad (3.7.38)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $\hat{\sigma}_z$ の固有状態はハミルトニアン$\hat{H}$ (3.7.38)の同時固有状態（σ_zもEも同時に正確に決めることができる状態）であることを確かめよ。また、$\hat{H}$の固有値を求めなさい。

（解答例）

$\hat{\sigma}_z|u>=(+1)|u>$、$\hat{H}|u>=\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z|u>=\frac{\hbar\omega}{2}(+1)|u>$,　**(演1)**

$\hat{\sigma}_z|d>=(-1)|d>$、$\hat{H}|d>=\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z|d>=\frac{\hbar\omega}{2}(-1)|d>$,　**(演2)**

なので、$\hat{\sigma}_z$ の固有状態$|u>,|d>$は $\hat{H}$ の固有状態でもある事がわかる（すなわち、$|u>,|d>$は $\hat{\sigma}_z$ と $\hat{H}$ の同時固有状態）。

$\hat{H}$ の固有値は $|u>,|d>$ の状態に対して、それぞれ　$\frac{\hbar\omega}{2},-\frac{\hbar\omega}{2}$　**(演3)**

（参考）同時固有状態を持つことは $[\hat{\sigma}_z,\hat{H}]=[\hat{\sigma}_z,\frac{1}{2}\hbar\omega\,\hat{\sigma}_z]=\frac{1}{2}\hbar\omega[\hat{\sigma}_z,\hat{\sigma}_z]=0$ となることからもわかる（3-6-3節参照）。

(2) 初期状態が $|\Psi(0)>=\alpha_u|u>+\alpha_d|d>$ の時、時刻tでの状態、$|\Psi(t)>$を求めよ。

（解答例） (3.7.16)式より、有限時間間隔 t の時間発展演算子$\hat{U}(t)$は$\hat{U}(t)=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ となるので、

$|\Psi(t)>=\hat{U}(t)|\Psi(0)>=e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\Psi(0)>=e^{-i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z t}|\Psi(0)>=e^{-i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z t}(\alpha_u|u>+\alpha_d|d>)$

$=\alpha_u e^{-i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z t}|u>+\alpha_d e^{-i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z t}|d>=\alpha_u e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u>+\alpha_d e^{+\frac{i\omega t}{2}}|d>$　**(演4)**

(参考）σ_zを観測する場合、時間がたってもα_u, α_d の位相が変化するだけなので $\sigma_z=+1$、$\sigma_z=-1$ がそれぞれ観測される確率 $P(u)$, $P(d)$は時間変化しない（確かめよ）。

(3) 初期状態が $\sigma_z=+1$ (すなわち、$|u>$) の時、時刻tにおけるスピンのz成分の期待値$<\hat{\sigma}_z>_t$を求めよ。

（解答例） $|\Psi(0)>=|u>$なので$|\Psi(0)>=\alpha_u|u>+\alpha_d|d>$において $\alpha_u=1$、$\alpha_d=0.$

式（演4）より、$|\Psi(t)>=e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u>$　　(演5)

時間がたっても状態は$|u>$のままで、その方向を変えない。

$$<\hat{\sigma}_z>_t=<\Psi(t)|\hat{\sigma}_z|\Psi(t)>=e^{\frac{i\omega t}{2}}<u|\hat{\sigma}_z|u>e^{-\frac{i\omega t}{2}}=<u|u>=1 \qquad \text{(演6)}$$

(4) 初期状態が $\sigma_x=+1$ (すなわち、$|r>$) の時、時刻tでの状態、$|\Psi(t)>$を求めよ。

（解答例） $|\Psi(0)>=|r>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{1}{\sqrt{2}}|d>$ なので、$\alpha_u=\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\alpha_d=\frac{1}{\sqrt{2}}$ （演7)

式（演4）より $|\Psi(t)>=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u>+e^{+\frac{i\omega t}{2}}|d>)$ （演8)

（初期状態が$|r>$の時、どの時間でσ_zを測定しても、$\sigma_z=+1$,と$\sigma_z=-1$ の結果が1/2の確率で観測される（期待値は０））

(5) (4)の$|\Psi(t)>$で σ_x を観測したところ、$\sigma_x=+1$ か $\sigma_x=-1$ の測定結果が得られた。それぞれの観測される確率を求めよ。

（解答例） $|\Psi(t)>=\alpha_r(t)|r>+\alpha_l(t)|l>$と書いたとすると、

$\sigma_x=+1$の観測される確率 $P(r)=\alpha_r^*\alpha_r=<\Psi(t)|r><r|\Psi(t)>$

$\sigma_x=-1$の観測される確率 $P(l)=\alpha_l^*\alpha_l=<\Psi(t)|l><l|\Psi(t)>$

これらの式と（演7)（演8)より、

$$P(r)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\frac{i\omega t}{2}}<u|+e^{\frac{-i\omega t}{2}}<d|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|u>+|d>)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(<u|+<d|)\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u>+e^{+\frac{i\omega t}{2}}|d>)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{i\omega t}{2}}<u|u>+e^{\frac{-i\omega t}{2}}<d|d>)\frac{1}{2}(e^{\frac{-i\omega t}{2}}<u|u>+e^{\frac{i\omega t}{2}}<d|d>)=\left|\frac{1}{2}(e^{-\frac{i\omega t}{2}}+e^{\frac{i\omega t}{2}})\right|^2=\cos^2\frac{\omega t}{2} \qquad \text{(演９)}$$

同様にして、$P(l)==\sin^2\frac{\omega t}{2}$ （演10)

（演９)(演10)より、どの時間でも $P(r)+P(l)=1$ になることがわかる。

(6) (4)の$|\Psi(t)>$での期待値$<\sigma_x>_t$, $<\sigma_y>_t$, $<\sigma_z>_t$を求めよ。

（解答例）

$$<\hat{\sigma}_x>_t=<\Psi(t)|\hat{\sigma}_x|\Psi(t)> =\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+\frac{i\omega t}{2}}<u|+e^{+\frac{-i\omega t}{2}}<d|)\ \hat{\sigma}_x\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u>+e^{+\frac{i\omega t}{2}}|d>)$$

$$=\frac{1}{2}\left(<u|\hat{\sigma}_x|u>+e^{-i\omega t}<d|\hat{\sigma}_x|u>+e^{i\omega t}<u|\hat{\sigma}_x|d>+<d|\hat{\sigma}_x|d>\right) \qquad \text{(演11)}$$

一方、$\hat{\sigma}_x$ の外積の表現 $\hat{\sigma}_x=|u><d|+|d><u|$ （(3-5-17) 式）を使うと、$\hat{\sigma}_x|u>=|d>$, $\hat{\sigma}_x|d>=|u>$ となるので、(演11)は

$$<\hat{\sigma}_x>_t=\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}\right)=\cos\omega t \qquad \text{(演12)}$$

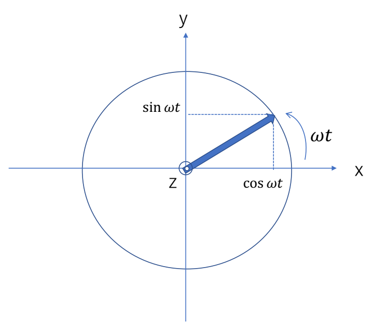
同様にして、 $<\hat{\sigma}_y>_t=<\Psi(t)|\hat{\sigma}_y|\Psi(t)> =\frac{1}{2}\left(<u|\hat{\sigma}_y|u>+e^{-i\omega t}<d|\hat{\sigma}_y|u>+e^{i\omega t}<u|\hat{\sigma}_y|d>+<d|\hat{\sigma}_y|d>\right)$ （演13)

$\hat{\sigma}_y$ の外積の表現 $\hat{\sigma}_y=-i|u><d|+i|d><u|$ （(3-5-18) 式）を使うと、$\hat{\sigma}_y|u>=i|d>$, $\hat{\sigma}_y|d>=-i|u>$ となるので、(演13)は

$$<\hat{\sigma}_y>_t=\frac{i}{2}\left(e^{-i\omega t}-e^{i\omega t}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)=\sin\omega t \qquad \text{(演14)}$$

$$<\hat{\sigma}_z>_t=<\Psi(t)|\hat{\sigma}_z|\Psi(t)>$$

$$=\frac{1}{2}\left(<u|\hat{\sigma}_z|u>+e^{-i\omega t}<d|\hat{\sigma}_z|u>+e^{i\omega t}<u|\hat{\sigma}_z|d>+<d|\hat{\sigma}_z|d>\right)=0 \qquad \text{(演15)}$$



(7) (6)の結果は、古典的にはスピンがどのような運動をしている事に対応するのか、述べよ。
（解答例） xy平面上において、スピンが角速度ωで磁場軸（z軸）の周りを反時計回りに回転（歳差運動）をする事に対応する。（右図参照）
（参考）コマが回転している場合（角運動量を持っている場合）、コマは倒れないで重力の方向の周りに歳差運動をする。今の場合、重力が磁場に、コマがスピンの作る磁気モーメントに、コマの回転がスピン角運動量に当たる。（力学の剛体の運動を復習せよ）

（重要）量子力学では、期待値が歳差運動するのであって、実際の観測値は固有値だけになる

4. $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ **を示せ。**

（**解答例**）左辺＝$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}\hat{B})$.

右辺＝$\hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$

よって、右辺＝左辺なので与式は証明された。

（参考）同様にして、$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$ （演16） を証明できる。

5. 期待値の時間変化の方程式（(3.7.31) 式 ）

$$\frac{d}{dt} < \hat{M} >_t = -\frac{i}{\hbar} < [\hat{M},\hat{H}] >_t$$

を使い、次の設問に答えよ。

(1) ハミルトニアンが $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ で表される時、$\dfrac{d}{dt} < \hat{x} > = \dfrac{1}{m} < \hat{p} >$ を求めよ。

（**解答例**）$\dfrac{d}{dt} < \hat{x} >_t = -\dfrac{i}{\hbar} < [\hat{x},\hat{H}] >_t$. （＊）

$$[\hat{x},\hat{H}] = [\hat{x},\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)] = \frac{1}{2m}[\hat{x},\hat{p}^2] + [\hat{x},V(x)] = \frac{1}{2m}(\hat{p}[\hat{x},\hat{p}] + [\hat{x},\hat{p}]\hat{p}) = i\hbar\frac{\hat{p}}{m}$$

ここで、$[\hat{x},V(x)] = 0$（$\hat{x}$ はxをかけるだけの演算子）、不確定性関係 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$、および、交換子に対する公式（問題２解答例の（演16）式を見よ）を使った。

（＊）の式に上の結果を代入すると、$\dfrac{d}{dt} < \hat{x} >_t = -\dfrac{i}{\hbar} < [\hat{x},\hat{H}] >_t = -\dfrac{i}{\hbar} < i\hbar\dfrac{\hat{p}}{m} >_t = \dfrac{1}{m} < \hat{p} >_t$ となる。

(2) 上の$\hat{H}$に対して、 $[\hat{p},\hat{H}] = -i\hbar\dfrac{\partial V}{\partial x}$ を示せ。

（**解答例**）

$$[\hat{p},\hat{H}] = [\hat{p},\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)] = \frac{1}{2m}[\hat{p},\hat{p}^2] + [\hat{p},V(x)] = 0 + [\hat{p},V(x)]$$

$\hat{p} \to -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ なので、交換子を任意の波動関数に作用させて考えると、

$$[\hat{p},V(x)]\psi(x) = (\hat{p}V(x) - V(x)\hat{p})\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(V(x)\psi(x)) - V(x)(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial V(x)}{\partial x}\psi(x).$$

よって、$[\hat{p},\hat{H}] = -i\hbar\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

(3) 上の$\hat{H}$に対して、$\dfrac{d}{dt} < p > = -\left\langle\dfrac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$ を示せ。

（これは**Ehrenfestの定理**である（演習2(6)の参考を参照））

（**解答例**）

(2)の結果を $\dfrac{d}{dt} < \hat{p} >_t = -\dfrac{i}{\hbar} < [\hat{p},\hat{H}] >_t$ の右辺に代入すると、$\dfrac{d}{dt} < p > = -\left\langle\dfrac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$が得られる。

演習2(6)を解く場合、部分積分などの面倒な計算が必要であったが、ここで解いた方法では交換関係の簡単な計算で求まる。