量子力学中間試験 解答例 (2019/6/6) 齋藤　ver. 1.3.1

[1] $\begin{cases} \text{ド・ブロイの関係式} & p = \dfrac{h}{\lambda} = \hbar k \\ \text{アインシュタインの関係式} & E = h\nu = \hbar\omega \end{cases}$ を任意の波動関数 $\psi(x)$ に作用させると、

$$E = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{V(x)}_{0} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

一方、$E = \hbar\omega$ なので　$\hbar\omega = \dfrac{(\hbar k)^2}{2m}$,　$\therefore \omega = \dfrac{\hbar}{2m} k^2$

---

[2] $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$

$\hat{x} \to x$, $\hat{p} \to -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$,　$[\hat{x}, \hat{p}] \to \left[x, -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}\right]$

$$\left[x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x) = x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x \cdot \psi(x)$$

$$= -i\hbar\, x\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(x\psi(x)\right)$$

$$= -i\hbar\, x\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar\left[\psi(x) + x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$= i\hbar\,\psi(x)$$

$\therefore [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

---

[3] (1) $\hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$,　$\hat{\sigma}_y^\dagger \to \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & (i)^* \\ (-i)^* & 0 \end{pmatrix}}^{\text{転置+複素共役}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \to \hat{\sigma}_y$

$\therefore \hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y^\dagger$　(エルミート演算子)

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_y^\dagger = \hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$\therefore \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_y^\dagger = \hat{I}$　(ユニタリー演算子)

(2)

●この解答例では行列表現で解く。(外積を使って解いても良い。)演習の解答例を見よ)

$$\begin{cases} |r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle + |d\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle - |d\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (*)$$

$$\hat{\sigma}_y|r\rangle \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to -i|l\rangle$$

$$\hat{\sigma}_y|l\rangle \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to +i|r\rangle$$

$\therefore \hat{\sigma}_y|r\rangle = -i|l\rangle$,　$\hat{\sigma}_y|l\rangle = +i|r\rangle$

(3) $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + i|d\rangle)$, ** $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle - i|d\rangle)$,

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$.

**

$|i\rangle, |o\rangle$ を $\{|r\rangle, |l\rangle\}$ を基底として表現すると,

$$|i\rangle = \alpha_r|r\rangle + \alpha_l|l\rangle, \quad |o\rangle = \beta_r|r\rangle + \beta_l|l\rangle$$

ここで $\alpha_r = \langle r|i\rangle$, $\alpha_l = \langle l|i\rangle$, $\beta_r = \langle r|o\rangle$, $\beta_l = \langle l|o\rangle$

(2)の * 式のブラ表現と(3)の ** 式を使って

$$\begin{cases}\alpha_r = \langle r|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i)\\ \alpha_l = \langle l|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i)\\ \beta_r = \langle r|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i)\\ \beta_l = \langle l|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i)\end{cases}$$

よって,
$$\begin{cases}|i\rangle = \left(\frac{1+i}{2}\right)|r\rangle + \left(\frac{1-i}{2}\right)|l\rangle\\ |o\rangle = \left(\frac{1-i}{2}\right)|r\rangle + \left(\frac{1+i}{2}\right)|l\rangle\end{cases}$$

(別解)

$\alpha_r = \langle r|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle u| + \langle d|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + i|d\rangle) = \frac{1}{2}(\langle u|u\rangle + i\langle d|d\rangle) = \frac{1}{2}(1+i)$,

他略

(4) $|r\rangle, |l\rangle$ を基底としたときの $\hat{\sigma}_y$ に対する行列表現は,

$$\hat{\sigma}_y \rightarrow \begin{pmatrix}\langle r|\hat{\sigma}_y|r\rangle & \langle r|\hat{\sigma}_y|l\rangle\\ \langle l|\hat{\sigma}_y|r\rangle & \langle l|\hat{\sigma}_y|l\rangle\end{pmatrix}$$ となる.

各要素は,

$$\begin{cases}\langle r|\hat{\sigma}_y|r\rangle = \langle r|(-i)|l\rangle = (-i)\langle r|l\rangle = 0\\ \langle r|\hat{\sigma}_y|l\rangle = \langle r|(+i)|r\rangle = (+i)\langle r|r\rangle = i\\ \langle l|\hat{\sigma}_y|r\rangle = \langle l|(-i)|l\rangle = (-i)\langle l|l\rangle = -i\\ \langle l|\hat{\sigma}_y|l\rangle = \langle l|(+i)|r\rangle = (+i)\langle l|r\rangle = 0\end{cases}$$

((2)の結果を使う)

∴ $|r\rangle, |l\rangle$ を基底にとると,

$$\hat{\sigma}_y \rightarrow \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

(参考) • $|r\rangle, |l\rangle$ を基底にとると $\hat{\sigma}_x \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_z \rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ となる.

$\hat{\sigma}_x$ の行列が対角行列になる事に注意せよ.

(• 一般には位相因子の分, 固有ベクトルには不定性がある(講義ノート P23 (3-3-4節)参照) ので $|r\rangle, |l\rangle, |i\rangle, |o\rangle$ の位相因子の分だけ行列表現が変わりえる.)

[4] (1) $|r\rangle = \gamma_i |i\rangle + \gamma_0 |0\rangle$ とすると、

[3]の(3)の結果を使って

$$\begin{cases} \gamma_i = \langle i|r\rangle = \langle r|i\rangle^* = \frac{1}{2}(1+i)^* = \frac{1}{2}(1-i) \\ \gamma_0 = \langle 0|r\rangle = \langle r|0\rangle^* = \frac{1}{2}(1-i)^* = \frac{1}{2}(1+i) \end{cases}$$

α_r^* 　 β_r^*

$$\therefore |r\rangle = \left(\frac{1-i}{2}\right)|i\rangle + \left(\frac{1+i}{2}\right)|0\rangle$$

$|r\rangle$の時、σ_yを観測すると$|i\rangle$か$|0\rangle$に状態は収縮し、その固有値、$\sigma_y=+1$か$\sigma_y=-1$が得られる。それらの確率を$P(\sigma_y=+1)$, $P(\sigma_y=-1)$と書く事にすると、

$$\begin{cases} P(\sigma_y=+1) = |\gamma_i|^2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^*\left(\frac{1-i}{2}\right) = \frac{(1+i)}{2}\cdot\frac{(1-i)}{2} = \frac{1}{4}(1-i^2) = \frac{1}{2} \\ P(\sigma_y=-1) = |\gamma_0|^2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^*\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{(1-i)}{2}\,\frac{(1+i)}{2} = \frac{1}{4}(1-i^2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

・この観測の結果は計算しなくとも、空間の対称性よりすぐに求まる。

(2) $\langle\hat{\sigma}_y\rangle_r = \langle r|\hat{\sigma}_y|r\rangle = \langle r|(-i)|l\rangle = -i\langle r|l\rangle = 0$

([3](2)の結果より $(-i)|l\rangle$)

$\langle\hat{\sigma}_y^2\rangle_r = \langle r|\hat{\sigma}_y^2|r\rangle = \langle r|\hat{I}|r\rangle = \langle r|r\rangle = 1$

($\hat{\sigma}_y$はユニタリーなので $\hat{\sigma}_y^\dagger\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{I}$)
([3](1)の結果)

(3) $\langle(\Delta\sigma_y)^2\rangle_r = \langle\hat{\sigma}_y^2\rangle_r - \langle\hat{\sigma}_y\rangle_r^2 = 1 - 0 = 1$

(4) $|r\rangle = 1\cdot|r\rangle + \underbrace{0\cdot|l\rangle}_{0}$ と書けるので

$|r\rangle$の時、σ_xを観測すると、状態は変化せず、常に$\sigma_x=1$が出現する。

よって、$\begin{cases}\sigma_x=+1 \text{ が出現する確率 } P(\sigma_x=+1)=1 \\ \sigma_x=-1 \quad〃 \quad P(\sigma_x=-1)=0\end{cases}$

(5) $\langle\hat{\sigma}_x\rangle_r = \langle r|\hat{\sigma}_x|r\rangle = \langle r|(+1)|r\rangle = \langle r|r\rangle = 1$

($|r\rangle$は$\hat{\sigma}_x$の固有状態)

$\langle\hat{\sigma}_x^2\rangle_r = \langle r|\hat{\sigma}_x^2|r\rangle = \langle r|\hat{I}|r\rangle = \langle r|r\rangle = 1$

$\therefore \langle(\Delta\hat{\sigma}_x)^2\rangle_r = \langle\hat{\sigma}_x^2\rangle_r - \langle\hat{\sigma}_x\rangle_r^2 = 1-1=0$

(6) $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \to i\hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \to -i\hat{\sigma}_z$$

$\therefore \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z - (-i\hat{\sigma}_z) = 2i\hat{\sigma}_z$. よって係数$\alpha = 2i$

(7) $\hat{\sigma}_x$と$\hat{\sigma}_y$の状態$|r\rangle$における不確定性関係は $\langle(\Delta\hat{\sigma}_x)^2\rangle_r\langle(\Delta\hat{\sigma}_y)^2\rangle_r \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]\rangle_r|^2$.

ここで(3)と(5)の結果より,

$\langle(\Delta\hat{\sigma}_x)^2\rangle_r = 0$, $\langle(\Delta\hat{\sigma}_y)^2\rangle_r = 1$ なので 左辺 $= 0$

右辺 $= \frac{1}{4}|\langle 2i\hat{\sigma}_z\rangle_r|^2 = \frac{1}{4}|2i\cdot\langle\hat{\sigma}_z\rangle_r|^2$

$\langle\hat{\sigma}_z\rangle_r = \langle r|\hat{\sigma}_z|r\rangle$

$\hat{\sigma}_z|r\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \to |\ell\rangle$ より $\langle\hat{\sigma}_z\rangle_r = \langle r|\ell\rangle = 0$

よって 左辺＝右辺＝0 となり不確定性関係の等号の場合が成り立つ.

[5] (1) 時刻tでの状態を$|\psi(t)\rangle$で表わすことにすると,

$t=0$, $|\psi(0)\rangle = |r\rangle$

$t=t$, $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|r\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|r\rangle$

$= e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}\frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + |d\rangle)$

$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z$ より $\hat{H}|u\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|u\rangle$, $\hat{H}|d\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega|d\rangle$ なので

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle+|d\rangle) = e^{-i\frac{(\frac{1}{2}\hbar\omega)}{\hbar}t}\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + e^{-i\frac{(-\frac{1}{2}\hbar\omega)}{\hbar}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u\rangle + e^{+\frac{i\omega t}{2}}|d\rangle\right)$$ //

(2) $\langle\hat{\sigma}_z\rangle_t = \langle\psi(t)|\hat{\sigma}_z|\psi(t)\rangle$

$$\hat{\sigma}_z|\psi(t)\rangle = \hat{\sigma}_z\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|d\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\underbrace{\hat{\sigma}_z|u\rangle}_{(+1)|u\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}\underbrace{\hat{\sigma}_z|d\rangle}_{(-1)|d\rangle}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u\rangle - e^{\frac{i\omega t}{2}}|d\rangle\right)$$

よって, $\langle\hat{\sigma}_z\rangle_t = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{+\frac{i\omega t}{2}}\langle u| + e^{-\frac{i\omega t}{2}}\langle d|\right)}_{\langle\psi(t)|}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u\rangle - e^{\frac{i\omega t}{2}}|d\rangle\right)}_{\hat{\sigma}_z|\psi(t)\rangle}$

$$= \frac{1}{2}(\langle u|u\rangle - \langle d|d\rangle) = 0$$

• z成分の期待値は時間変化しない(tによらず0となる)

(3) $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_x | \psi(t) \rangle$

(1)の結果より, $|\psi(t)\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{i\omega t}{2}} \overset{|u\rangle}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + e^{+\frac{i\omega t}{2}} \overset{|d\rangle}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{+\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$

$$\underline{\hat{\sigma}_x |\psi(t)\rangle} \to \overset{\hat{\sigma}_x}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \overset{|\psi(t)\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{+\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{+\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$$

よって, $\langle \psi(t) | \underline{\hat{\sigma}_x | \psi(t) \rangle} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{+\frac{i\omega t}{2}} \quad e^{-\frac{i\omega t}{2}} \right)}_{\langle \psi(t) |} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{+\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)$$

$$= \cos \omega t$$

(4) $\langle \hat{\sigma}_y \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_y | \psi(t) \rangle$

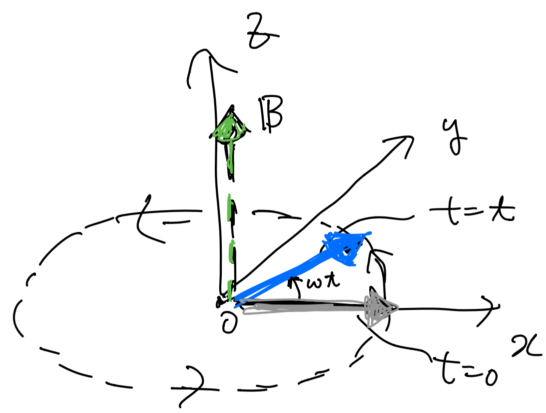
$$\hat{\sigma}_y |\psi(t)\rangle \to \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{\sigma}_y} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{+\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}}_{|\psi(t)\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i e^{+\frac{i\omega t}{2}} \\ +i e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} \\ -e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$$

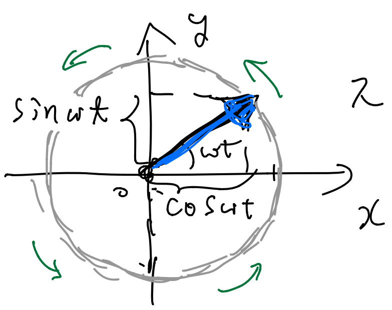
よって, $\langle \psi(t) | \hat{\sigma}_y | \psi(t) \rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{+\frac{i\omega t}{2}} \quad e^{-\frac{i\omega t}{2}} \right)}_{\langle \psi(t) |} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} \\ -e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$

$$= \frac{-i}{2} \left(e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t} \right)$$

$$= \sin \omega t$$

(5) $\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle_t = \cos \omega t \\ \langle \sigma_y \rangle_t = \sin \omega t \\ \langle \sigma_z \rangle_t = 0 \end{cases}$ より





スピンの期待値は磁場に垂直なxy平面の中を反時計まわりに角速度ωで回転している (歳差運動)

(・σ_zの期待値は常に0である)

[6] $\hat{x}$の固有状態 $|x\rangle$ を基底に選ぶと、任意の状態 $|\psi\rangle$ は、

$$|\psi\rangle = \int \Psi(x)\,|x\rangle\,dx$$ ， と書ける

ここで $|\psi\rangle$ に対応する座標表示の波動関数 $\psi(x)$

は $\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$ で求まる。

今，$|\psi\rangle$ として $\hat{x}$ の固有状態 $|x'\rangle$ をとると，

$$|x'\rangle = \int u_{x'}(x)\,|x\rangle\,dx$$ と表わされるので，

∴ $\hat{x}$ の固有関数は $u_{x'}(x) = \langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$

（正規直交基底）