

量子力学期末試験 解答例 (2019/8/5実施) (ver 1.2)

[1] (1) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}$

$\hat{p}_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hat{x} \rightarrow x$

$[\hat{x}, \hat{p}_x]\varphi = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\varphi - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \cdot x\varphi$ (③ 波動関数に作用させてみる)

$= -i\hbar x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi)$

$= -i\hbar x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\hbar \varphi + i\hbar x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = i\hbar \varphi$

$\therefore [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$

(2) $[\hat{x}, \hat{p}_x^2] = \hat{p}_x[\hat{x}, \hat{p}_x] + [\hat{x}, \hat{p}_x]\hat{p}_x$

$= \hat{p}_x(i\hbar) + (i\hbar)\hat{p}_x$

$= 2i\hbar \hat{p}_x$

(3) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z)$

$= [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z]$

$= \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{y}, \hat{z}\hat{p}_x]\hat{p}_z - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{z}, \hat{z}\hat{p}_x]\hat{p}_y$

$- \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] - [\hat{y}, \hat{x}\hat{p}_z]\hat{p}_z + \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] + [\hat{z}, \hat{x}\hat{p}_z]\hat{p}_y$

$= \hat{y}\{ \hat{z}[\hat{p}_z, \hat{p}_x] + [\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_x \} + \{ \hat{x}[\hat{z}\hat{p}_z] + [\hat{z}, \hat{x}]\hat{p}_z \} \hat{p}_y$

$= -i\hbar \hat{y}\hat{p}_x + i\hbar \hat{x}\hat{p}_y = i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) = i\hbar \hat{L}_z$

(4) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y^2] = \hat{L}_y[\hat{L}_x, \hat{L}_y] + [\hat{L}_x, \hat{L}_y]\hat{L}_y$

$= \hat{L}_y(i\hbar \hat{L}_z) + (i\hbar \hat{L}_z)\hat{L}_y$

$= i\hbar(\hat{L}_y\hat{L}_z + \hat{L}_z\hat{L}_y)$

③
($2i\hbar \hat{L}_y\hat{L}_z$ は間違...) $\therefore \hat{L}_y\hat{L}_z \neq \hat{L}_z\hat{L}_y$

[2] (1) $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

(2) $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$

$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = 2 \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} \rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \cdot \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

$\hat{a} - \hat{a}^\dagger = 2 \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \frac{i\hat{p}}{m\omega} \rightarrow \hat{p} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \cdot \frac{m\omega}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$

$$(3) \langle \hat{x} \rangle_n = \langle n | \hat{x} | n \rangle$$

$$= \langle n | \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\{ \underbrace{\langle n | \hat{a} | n \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle}_{=0} \right\} = 0$$

$$\langle \hat{p} \rangle_n = \langle n | \hat{p} | n \rangle = \langle n | \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | n \rangle = 0$$

$$(4) \langle \hat{x}^2 \rangle_n = \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle$$

$$= \langle n | \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}) | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \cdot \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle n | \hat{a}^\dagger \sqrt{n} | n-1 \rangle + \langle n | \hat{a} \sqrt{n+1} | n+1 \rangle)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (\sqrt{n} \langle n | \hat{a}^\dagger | n-1 \rangle + \sqrt{n+1} \langle n | \hat{a} | n+1 \rangle)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \langle n | n \rangle + \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} \langle n | n \rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1)$$

⊗

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_n = \langle n | \hat{p}^2 | n \rangle = \langle n | \left(-\frac{m\omega\hbar}{2}\right) (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | n \rangle$$

$$= -\frac{m\omega\hbar}{2} \langle n | (\hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}) | n \rangle$$

$$= \frac{m\omega\hbar}{2} \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) | n \rangle$$

$$= \frac{m\omega\hbar}{2} (2n+1)$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_n &= \langle \hat{x}^2 \rangle_n - \langle \hat{x} \rangle_n^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) - 0 = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) \\ \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle_n &= \langle \hat{p}^2 \rangle_n - \langle \hat{p} \rangle_n^2 = \frac{m\omega\hbar}{2} (2n+1) - 0 = \frac{m\omega\hbar}{2} (2n+1) \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{4} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle i\hbar \rangle|^2 = \frac{1}{4} (-i\hbar)(i\hbar) = \frac{1}{4} \hbar^2$$

$$\therefore \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle_n \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle_n = \frac{\hbar^2}{4} (2n+1)^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2$$

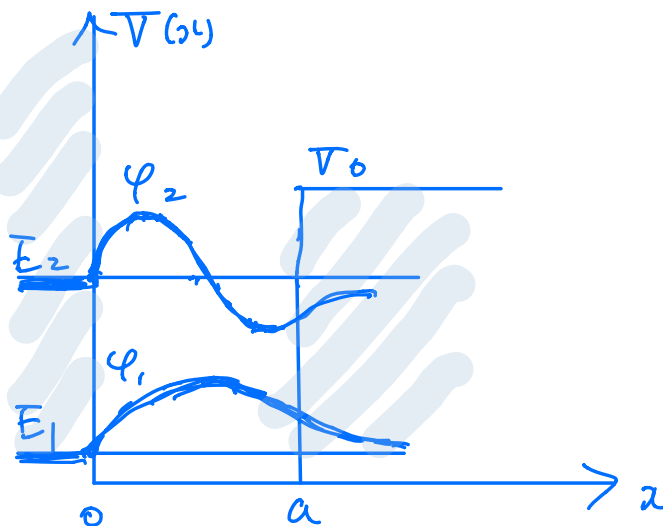
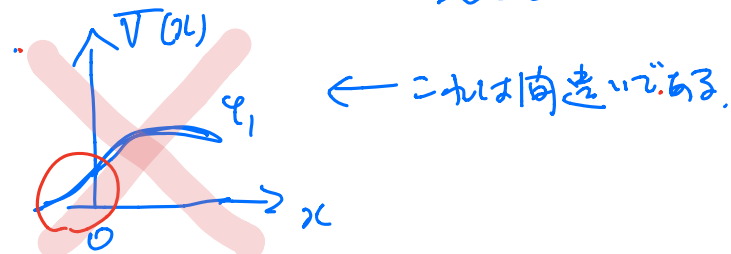
(等号は $n=0$ のときのみ)

[3]

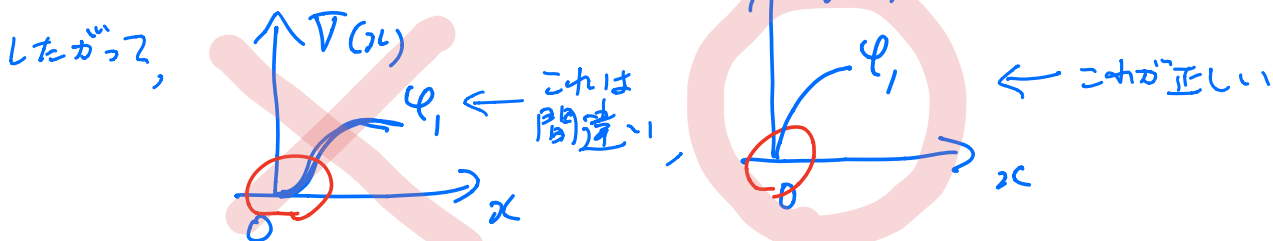
答は右図.

<解説>

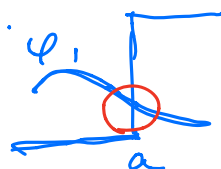
- ① $x \leq 0$ で $V(x) = \infty$ (3行)
 かつ $x \leq 0$ で $\psi(x) = 0$ (読み出しなし)
 ($x=0$ で ψ は連続だが, ψ' は不連続)



- ② $0 \leq x \leq a$ での解は $\sin kx$ の形 ($V=0$ の範囲で)



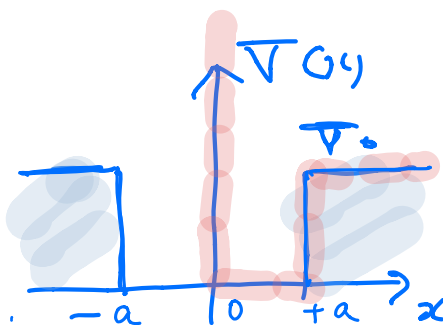
- ③ $x > a$ では V_0 が有限で一定なので, $\psi \sim e^{-\alpha x}$ の形で読み出す.
 かつ $x=a$ で $\sin$ と $e^{-\alpha x}$ が連続でなめらかにつながる



- ④ 第1励起状態は節が1個できる.

<別解: パリティの性質を使う>

右図の箱形ポテンシャルの
 解のうち, 奇関数の $\psi(x \geq 0)$
 のみが, 内題のポテンシャルの解となる.



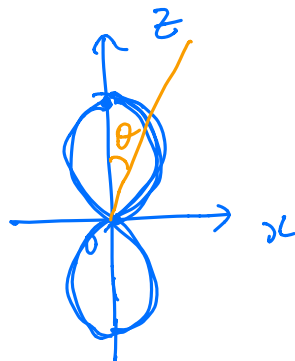
(理由: 奇パリティの ψ は必ず $\psi(0)=0$. これは $x=0$ で
 $V(x)=\infty$ にとったのと同じ境界条件となる)

∴ 箱形ポテンシャルの $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots$ のうち, ψ_2 が
 内題のポテンシャルの基底状態に, また ψ_4 が第1励起状態の解
 になる (ただし, いずれも $x \geq 0$)
 ← ψ_1 ではない.
 ← ψ_2 や ψ_3 ではない.

[4]

(1) $m=0$

(解説) $|\psi_0|^2 \sim \cos^2 \theta$
 これを xy 面で書くと右図のようになる。
 これを z 軸のまわりに回転すると1個の
 図となる (波動は3の解が答例を見よ)

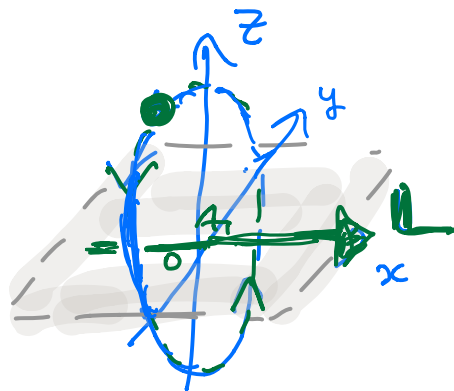


(2) xy 面内にある任意の軸のまわりに回転している。

(例) 右図は L が x 軸正の方向を向いている場合

($m=0$ は $L_z=0$ に対応)

(注) L に垂直な面の中を回転する。ただし、回転により
 右ネジが進む方向に L がくる ($L = \hbar \times p$)



[5]

(1) $3d \rightarrow n=3, l=2, m = \underbrace{-2, -1, 0, 1, 2}_{d \text{ 軌道}}$

(2) $4f \rightarrow n=4, l=3, m = \underbrace{-3, -2, -1, 0, 1, 2}_{f \text{ 軌道}}$
 縮退数は $2l+1 = 7$

(注) $4^2=16$ とするのは間違っている (f 軌道 ($l=3$) の場合のみであって)
 m の縮退数 $2l+1$ だけである。

[6]

(1) $\psi_1 = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, \quad \psi_2 = C e^{ik_2 x}$

$x=0$ での接続条件. ① $\psi_1(0) = \psi_2(0),$ ② $\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$

$\begin{cases} \text{① より } A+B=C \\ \text{② より } Ak_1 - Bk_1 = Ck_2 \end{cases}$

これから、

$\frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$

(2) $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \geq 0$

(等号は $k_1 = k_2$ のときのみ、すなわち、 $V_0 = 0$ のときのみ)

したがって $E > V_0 (\neq 0)$ であっても必ず反射波は存在する)