3. 仕事とエネルギー

3.0　準備（ベクトルの内積の復習）

ベクトルの積には内積（スカラー積）と外積(ベクトル積）がある。ここでは、仕事を定義する際に必要な内積について述べる。外積は回転運動に関係するので、その時に述べる。

任意のベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ があり、そのなす角度を θ とする。内積は以下のように定義される。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (3\text{-}1)$$

式(3-1)からわかるように、内積の結果は「スカラー」である。

これを幾何学的に見てみよう。

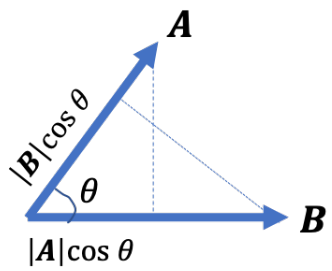
$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$の内積を、

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|(|\mathbf{B}|\cos\theta) = (|\mathbf{A}|\cos\theta)|\mathbf{B}| \qquad (3\text{-}2)$$

のように書いてみると、式(3-2)は、

内積 ＝ $\mathbf{A}$の大きさ × （$\mathbf{B}$の$\mathbf{A}$への射影）＝（$\mathbf{A}$の$\mathbf{B}$への射影）× $\mathbf{B}$の大きさ

と解釈できる。すなわち、内積とは「自分の大きさと相手の自分への射影の積」という事になる。これを右図に示した。



$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角度が90度の場合は、式(3-1)で $\cos 90^\circ = 0$ なので、内積も0になる。

よって、

$$\mathbf{A}\perp\mathbf{B} \ \rightleftarrows\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

これを幾何学的に見ると、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が直交していれば、お互いの射影成分が0であることを示している。

念のため、内積を直交座標における成分で表しておく。

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$、$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とすると、内積は

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

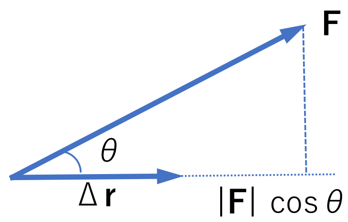
と書ける。

3.1 仕事

3-1-1 仕事の定義

力 $\mathbf{F}$ が質点にした仕事(work) W（あるいは、質点が $\mathbf{F}$ にされた仕事）は、その力 $\mathbf{F}$ と、その力のもと質点が移動した変位ベクトル$\Delta\mathbf{r}$の内積（スカラー積）で、以下のように定義される[1]。

$$W \equiv \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \qquad (3\text{-}4)$$

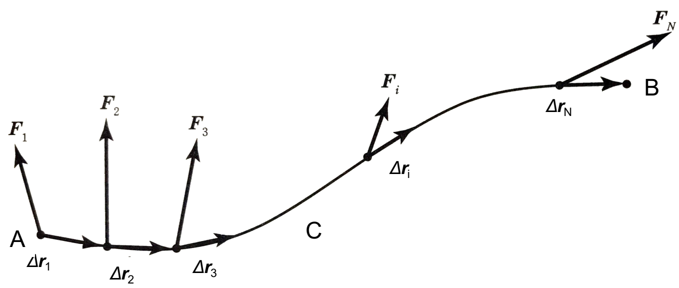


$\mathbf{F}$ と $\Delta\mathbf{r}$ の方向は必ずしも平行ではないことに注意しよう。その時、式(3-4)は$|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ と書けることから、$\mathbf{F}$ の「$\Delta\mathbf{r}$ への射影成分」のみが仕事に寄与することになる。もし、力の方向と質点の移動方向が垂直の時は、その力は仕事へ何の寄与もしない。

仕事はベクトルの内積で定義されるのでスカラー量である。物体を 1 [N] の力で、力の方向に1 [m] 移動した際、その力は 1 [J] の仕事をした（物体は1 [J] の仕事をされた）という。

3-1-2 力の場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の中での仕事（線積分）

今、ある力の場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の中で、下図のように、質点をAからBまで曲線C（経路C）に沿って動かす場合の仕事 W を求めることを考える。$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は一般には場所ごとに異なる方向や大きさを持った力の場になっていることに注意しよう[2]。



このような場合、全体の仕事 W は単純に式(3-4)で書くことはできない。式(3-4)には「$\Delta\mathbf{r}$ の移動の際、$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の方向や大きさに変化はない」という条件がついているからである。

そこで、経路CをN個の短い区間に分割することを考える。

図のように、それぞれの区間に１、２、…、Nと番号をつけ、経路に沿って変位ベクトルを$\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \cdots, \Delta\mathbf{r}_i, \cdots, \Delta\mathbf{r}_N$ とする。「各区間の中でも」$\mathbf{F}$ はその大きさや方向を変えているだろうが、それぞれの区間の始点の位置での力を図のように $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots, \mathbf{F}_i, \cdots, \mathbf{F}_N$ と置くことにする。今、i 番目の区間で$\mathbf{F}_i$ と $\Delta\mathbf{r}_i$ の内積をとり $\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i$ のように表すことにすると[3]、全ての区間での和、$\Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_i + \cdots + \Delta W_N$ は経路に沿った全仕事の荒い近似になっているだろう。しかし、分割数 N を増やすことにより各区間の間隔を充分狭くし、その区間では$\mathbf{F}$ が変化し

---

[1] 質点が$\Delta\mathbf{r}$ 移動する間、力は変化しないとしていることに注意

[2] 例えば、２章で示した万有引力の場などを思い浮かべよう。

[3] 各区間の中でもFは変化するので、正しい仕事の値にはなっていない。また、各区間での経路の変化も変位ベクトルで表されるような直線からは、ずれている。

ないように、また、経路も真の経路に近づくようにすれば、その極限として経路に沿った全仕事となる、と考えられる[4]。すなわち、

$$W = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta W_i\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i\right) \qquad (3\text{-}5)$$

式(3-5)を次にように書き、**「線積分」**と呼ぶ。

$$W = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i\right) \equiv \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}6)$$

（通常の積分との関係）
例えば、$f(x)$ という x の関数があったとし、$x=a$ から $x=b$ まで積分することを考える。$a \leqq x \leqq b$ の区間で$f(x)$ が常に正の値を取る場合は、この積分 S は、この区間で $f(x)$とx 軸で囲まれた面積に等しくなる。このため、積分＝面積という図式でとらえている人も多いと思う。この場合、この積分は、$a \leqq x \leqq b$ の区間を N個 に分割し、それぞれの区間 Δx_iと $f(x_i)$とで囲まれた短冊形の面積を足し合わせたものの極限として定義される（ここで、x_i はその区間での左端の値とする）。すなわち、

$$S = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}f(x_i)\Delta x_i\right) \equiv \int_a^b f(x)dx.$$

この式は、(3-6)式と同様に「ある領域を無限の区間に分けて、それぞれの区間での値を足し合わせて行く」という無限級数のイメージで捉えることができる。

このように、<u>積分は、「ある領域を無限の区間に分けて、それぞれの区間での物理量を足し合わせて行く」、といった無限級数のイメージでとらえることができる</u>。線積分という名前は、経路（曲線）に沿って足し合わせて行くことから来ている[5]。

結局、<u>力の場の中の任意の経路に沿った仕事は、一般的に、線積分 (3-6) 式で表される</u>。経路を特定させるため、始点Aと終点Bは積分記号の下限と上限に書く。また、複数の経路があり、紛らわしい時は、経路の記号を書き添えても良い。

本講義では、経路Cに沿っていることは、

$$\text{経路Cに沿い始点Aから終点Bまで質点を運ぶ仕事 } W_{(C)} = \int_{A\,(C)}^{B}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}7)$$

のように書くことにする。なお、積分の中の $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は略して$\mathbf{F}$ とだけ書くこともある。また、$\mathbf{F}$ と $d\mathbf{r}$ の間の「ドット」も省略する事が多い。

---

4 極限が収束する、としている。

5 「線積分」のほかにも、曲面を区間に分けて物理量を足し合わせて行く「面積分」や、ある領域を局所的な体積に分けて足し合わせて行く「体積積分」などがある。

3-1-3 保存力の場

力の場$\mathbf{F}(\mathbf{r})$中で質点をAからBまで移動させる。この時、下図のように、異なるいくつかの経路 $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ をたどった場合、仕事は $W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots, W_n$ と書くことにする。

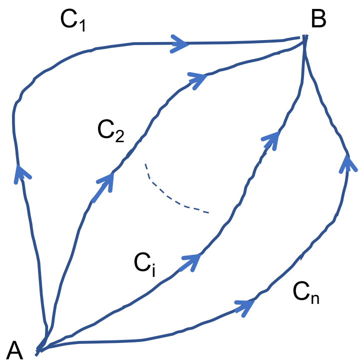
ここで、式(3-7)より、

$$W_1 = \int_{A\,(C_1)}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$W_2 = \int_{A\,(C_2)}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}8)$$

$$\vdots$$

$$W_n = \int_{A\,(C_n)}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$



となる。一般に、力の場$\mathbf{F}(\mathbf{r})$中で、様々な経路をたどって仕事を計算すると、その時のそれぞれの仕事の値は異なったものになる、と予想される。
すなわち、

（一般の力の場）　$W_1 \neq W_2 \neq \ldots \neq W_n$.

ところが、質点を運ぶ始点と終点を決めた時、式(3-8)で計算される仕事が経路によらずにどれも同じ値になるような力の場が存在する。そのような力を**保存力**(conservative force)と呼んでいる。

（**保存力の場**）　$W_1 = W_2 = \ldots = W_n$.　(3-9)

基本的な力である、万有引力、電磁気力（クーロン力）、核力（強い力、弱い力）は全て保存力である。後の節で詳しく述べるが、「保存力」という名前は「エネルギー保存」からきていて、保存力の場ではポテンシャルエネルギーが一義的に定義できる。

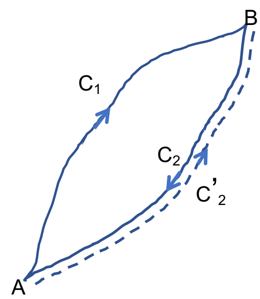
保存力の場の元で、ある出発点から質点を運び、再び元に戻ってくるような任意の経路 C をたどった場合、その仕事 $W_{(C)}$ は正味ゼロになることを示せる。

この線積分を、　$W_{(C)} = \oint_{(C)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$　(3-10)

のように書いて、**一周積分（周回積分、循環積分）**と呼ぶ。

（式(3-10)の証明）

今、保存力の場の元で、右図のように、A点から質点を任意の経路 C_1をたどってB点に移動し、任意の経路 C_2をたどってA点に戻ってくることを考える。この時の全仕事は、



$$W_{A\to C_1\to B\to C_2\to A} = \int_{A\,(C_1)}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{B\,(C_2)}^{A} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}11)$$

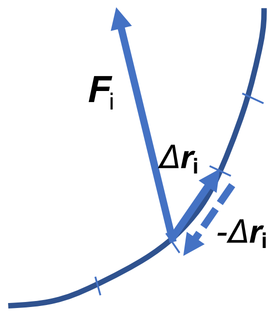
と書ける。

ところで、同じ力の場の中で、ある区間、経路を逆にたどると（下限と上限を入れ替えると）、その区間での線積分は元の線積分に-1をかけたものになる。

今の例でいうと、C_2 の経路を逆転し、C_2' にすると（前ページの下の図を見よ）、

$$\int_{B\ (C_2)}^{A} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} = -\int_{A\ (C_2')}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} \qquad (3\text{-}12)$$

となる。この理由は、右図にあるように、経路を逆転すると、力の場は同じなのに変位ベクトルが逆を向くため、それらの内積にマイナスがつくためである。すなわち、



経路を逆転すると $\mathbf{F_i}\cdot d\,\mathbf{r_i} \ \to \mathbf{F_i}\cdot(-d\,\mathbf{r_i}).$ (3-13)

結局、式(3-11)は式(3-12)を使って、

$$W_{A\to C_1\to B\to C_2\to A} = \int_{A\ (C_1)}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} - \int_{A\ (C_2')}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} \qquad (3\text{-}14)$$

となる。

ところで、保存力場では仕事は経路によらずに決まるのであるから、右辺の第1項 (A点からB点への経路C_1での仕事）と第2項（A点からB点への経路 C_2' での仕事）は等しい。

$$\int_{A\ (C_1)}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A\ (C_2')}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} \qquad (3\text{-}15)$$

よって、式(3-14)はゼロになる。

経路C_1、経路 C_2' は任意に選んだのであるから、経路によらず、

$$W_{(C)} = \oint_{(C)} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} = 0 \qquad (3\text{-}16)$$

となることが得られた。

こうして、保存力の場では、どんな経路をたどっても一周して元の点に戻れば正味の仕事は０になることがわかった。この数学的な表現が式(3-10)（あるいは式(3-16)）となる。これは**エネルギー保存**を表しているがポテンシャルエネルギーの節で再度述べる。

ベクトル解析の言葉で言うと、式(3-10）で表されるようなベクトル場を**渦無し場**と呼ぶ。

（補足）

ベクトル解析はもともと流体の場から発展してきたものである。流体の流速の場の一周積分（出発点に戻ってくるような経路に沿っての線積分）では、実際に渦があるかどうかは

$$\Gamma \equiv \oint_{(C)} \mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot d\,\mathbf{r} \qquad (3\text{-}17)$$

なる積分で判定できる。この Γ を循環と呼び、$\Gamma = 0$ ならば渦なし場となる。どうして、そう言えるかは、いろいろな流速の場（各点で流体の速度を描いたベクトル場） $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ の図を書いて考えてみよ。(湧き出し口がある場合、吸い込み口がある場合、渦がある場合など)

3-1-3 中心力場（保存力場の例）

基本的な力である、万有引力、電磁気力（クーロン力）、核力（強い力、弱い力）は全て「保存力」であることは、先ほど述べたが、これらは全て「**中心力** (central force)」と呼ばれる力の場になっている。

中心力の場は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (3\text{-}18)$$

で定義される。ここで、$r = |\mathbf{r}|$ で $f(r)$ は任意の r の関数である。

式(3-18)において、$\frac{\mathbf{r}}{r}$ は原点（中心）から考えている点までの位置ベクトル $\mathbf{r}$ を自分自身の大きさで割ったものであるから、長さが１で $\mathbf{r}$ 方向を向いた単位ベクトルを示している[6]。よって、各点での中心力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は、いつも原点（中心）とその点を結ぶ直線上を向いており、その大きさは原点からの距離のみの任意の関数 $f(r)$ で決まることを示している。

具体例を見てみよう。
すでに2章で出てきた万有引力は、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (3\text{-}19)$$

であったが、式(3-18)と比較すると、$f(r)$として、

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^2} \qquad (3\text{-}20)$$

と置いたことに相当する。したがって、万有引力は中心力と言える。

静電場も中心力場である。

中心に正の電荷 Q がある場合、その周りの静電場は

$$f(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\text{、} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (3\text{-}21)$$

のように書ける。

このほか、ここでは示さないが核力なども中心力であることがわかっている。

ところで、**中心力の場は必ず保存力の場になっている**。この理由は、中心力ベクトルの方向が式(3-18)で表されるように、常に中心とその点を結ぶ方向を向いている（平行あるいは反平行、どちらでも良い）幾何学的な理由による。この証明は式で実行することもできるし、簡単な幾何学的考察からも可能である[7]。

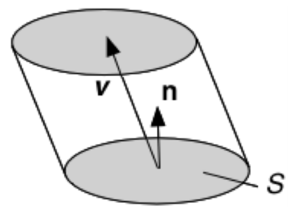
---

[6] すでに式(2-2)の中に出てきた。

[7] 演習で実施する

演習3

1. 一様な流速 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ m/sで運動する流体があったとする。図のように、この中に任意の円形の面（面積S m²）を考える。この面を単位時間に貫く流体の体積 V m³ は $V = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}$ と流速ベクトルと面積ベクトルのスカラー積になることを示せ。ただし、$\mathbf{n}$ を面に垂直な単位ベクトルとしたとき、面積ベクトル $\mathbf{S}$ は $\mathbf{S} = (S\,\mathbf{n})$で定義される。（$S \equiv |\mathbf{S}|$）



（**参考**）任意の形の面から単位時間に流れ出る流体の全体積は、その面をN個の微小な面要素$\Delta\mathbf{S}_i$に分割し、それぞれの面要素から流れ出る流体$V_i = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{S}_i$の和で近似できる。最終的に考えている面の分割を無限大に持っていったその極限$V = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{S}_i\right) \equiv \int \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ は（収束すれば）正しくその面全体から単位時間に流れ出る流体の体積になっているであろう。このような積分を「**面積分**」という。「閉曲面（閉じた面）」から流れ出てくる単位時間あたりの正味の流体の体積は、全閉曲面に渡って面積積分すれば良い。このような量 Φ を「**束**」とか「**フラックス**」と呼ぶ。

2. 以下の図は、流体の流速の場 （各点で流体の速度を描いたベクトル場。図では、その接線方向をつないで「**力線**」[8]の形で書いてある）(a) において、式(3-17)の積分 Γ （**循環（積分）**」

$$\Gamma \equiv \oint_{(C)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}17)$$

が「この場において渦があるかどうか」の判定に使えることを説明したものである（Feynman物理学 第２巻より転載）。$\Gamma \neq 0$ なら渦がある場であり、$\Gamma = 0$ ならば「**渦なし場**」となる。この図の英文キャプション（Fig. 1-4）を読んで、このことを簡単に説明せよ。

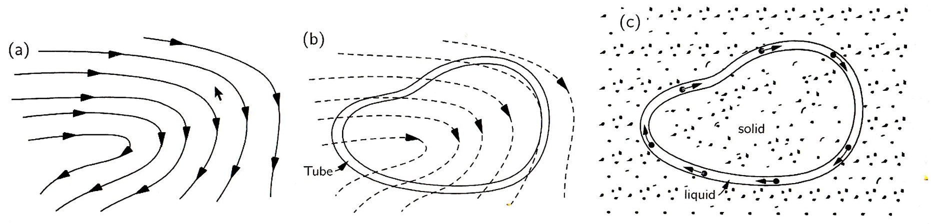


Fig. 1–4.(a) The velocity field in a liquid. Imagine a tube of uniform cross section that follows an arbitrary closed curve as in (b). If the liquid were suddenly frozen everywhere except inside the tube, the liquid in the tube would circulate as shown in (c).

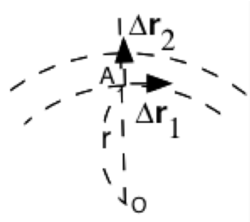
（参考）**任意のベクトル場の性質は束Φ（フラックス）と循環Γで記述できる**。電磁気学の基本方程式であるMaxwellの方程式は電場と磁場（両者ともベクトル場である）、それぞれのΦとΓを記述した４本の式からなっている。[9]

---

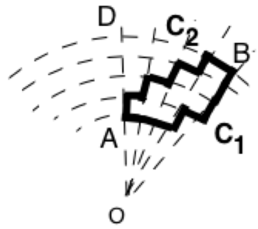
[8] 流線とも言う。

[9] 電磁気学の教科書参照（例えば、ファインマン物理学第２巻（岩波書店）の電磁気学の章やバークレー物理学コースの電磁気学（図書館にある）を見よ。それらにはベクトル解析の優れた解説が載っている。）

3.　中心力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ が保存力であることを以下の手順で証明せよ。



(1)　右上図のように、中心力場の中心０から距離rだけ離れたA点を出発点とし、半径 r の円周上に$\Delta\mathbf{r}_1$だけ進んだ時の仕事と、それとは垂直に動径方向に$\Delta\mathbf{r}_2$だけ進んだ時の仕事をそれぞれ求めよ。ただし、$\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$ は十分小さく、その移動の間、力は変化しないとする。



(2)右下図のようにA点からＢ点まで異なる二つの経路、C_1とC_2で仕事を計算する。この二つの仕事が同じ値になり、その値はA点からＤ点まで動径方向に進んだ経路の仕事に等しくなることを示せ。ただし、経路は力の中心０を中心として動径方向と円周方向の組み合わせになっている。

(3)　上の結果をもとにして、中心力の場では経路によらず２点間の仕事が決まる（保存力の場である）ことを導きなさい。