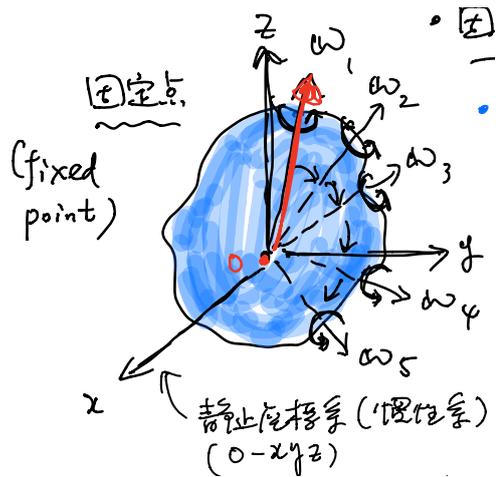


10 剛体の力学 II (固定点を持つ剛体の運動)

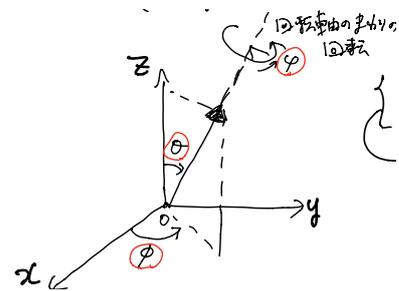
第8章では「固定軸を持つ剛体」の運動について調べた。その時、剛体の自由度は1となり、剛体の運動を決める方程式は1つです。しかし、一般的な剛体の複雑な運動を扱うためには、これでは不十分である。8.6節ではコマの運動を解析したが、実は、これは「固定軸の周りの運動」では無い (p.86の下の図を見ると明らかである)。剛体の回転軸の端は原点に固定されている (固定点を持つ) が、回転軸自体は自由に動き回れるようになっている。コマの運動を含めて、このような複雑な剛体の運動を一般的に扱うためには、「固定点を持つ剛体の運動」について考える必要がある。このとき、剛体の自由度は3となり、その扱いも面倒になるが、**剛体に乗って見る座標系 (非慣性系)** をうまく選び、「慣性テンソル」や前章で学んだ慣性力を導入することによって、「**オイラーの方程式**」と呼ばれる基本的な方程式を得る事ができる。本章では、これを導く流れを示し¹、簡単な応用問題を扱う。

10.1 固定点のまわりの運動

固定軸のまわりの回転運動は、すでに8-3節で見たように、回転軸 (z軸) のまわりの回転角 φ を変数にとった回転の運動方程式 $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z$ (8-3-2) で表すことができた。しかし、もっと一般的に剛体の回転運動を扱うため、剛体に「固定点 (fixed point)」のみ残し、後は自由な回転運動を考えることにする。



まず、右図のように、回転軸の固定点 (重心であっても他の点であっても良い) が原点に一致するように設定した「静止座標系 (0-xyz)」から剛体の運動を見たとする。剛体は複雑な回転運動をするが、その一瞬、一瞬はある回転軸のまわりの運動としてとらえることができる。また、その回転軸の向きは、その瞬間の角速度ベクトル ω の向きで表すことができる。角速度ベクトルは時間とともに自由に向きを変えることが可能なだけでなく、その大きさ (角速度) も変化できる。また、剛体は原点しか固定されていないので、 ω ベクトルの先端は常に剛体の同じところにある必要はなく、一般的には右図のように ω はその大きさも変えながら剛体の表面を時間とともに動き回ることになる。このとき、各瞬間の回転を記述しようとする ω 軸の周りの質量分布も次々と変化するので必要となる 慣性モーメントも時間とともに変化することになるであろう。



この複雑な剛体の運動にどう対処するか、は後で述べることにし、先に「固定点のまわりの剛体の運動」の自由度はいくつになるか調べよう。ある瞬間の ω の向きが決まるには、右図のように、2つの角度 θ, ϕ が必要になる。さらに、その回転軸の周りの剛体の回転角 φ を指定すれば、剛体の配置が一義的に決まる²。よって、この場合の**自由度は3**となる。

¹ この流れは、複雑な現象をどのように扱っていけば良いか、の一例になるだろう。この章では、細かいところまで追求するより、全体の流れを把握するようにすると良い。

² 3つの回転角の取り方にはいろいろな方法がある。オイラー角の取り方が有名であるが、この講義では立ち入らない。例えば、大島隆義著、「力学読本 自然は方程式で語る」(名古屋大学出版会)の16-2節をみよ。

自由度の数が3と決まったので、「固定点のまわりの剛体の運動」を決める方程式は3つ必要であることがわかる(第8章での議論参照)。固定軸の場合は、自由度1であったので、回転の運動方程式のz成分のみを選んだ。しかし、固定点の場合は、自由度3なので、ベクトルで書かれた回転の運動方程式を丸ごと採用すれば良いだろう。

$$\frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = \mathbf{N}_{tot}^{ex} \tag{10-1-1}$$

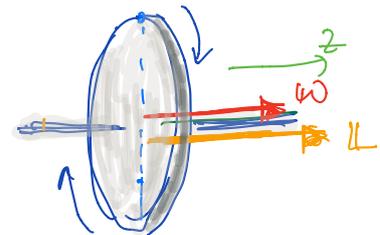
この節の最後に、「固定点のまわりの剛体の運動」の複雑な状況への対処の仕方を考えよう。まず、慣性モーメント I が刻々と変わる事態をどうするか。これが起きた理由は、回転軸が剛体に対して次々と向きを変えるために、回転軸のまわりの質量分布が時間変化するからである。これを回避するためには、慣性モーメントが時間変化しないような座標系を採用すれば良い。これを可能にするためには、「剛体に固定した座標系 ($o'-x'y'z'$)」をとることである。(o' のようにダッシュをつけて表すことにする。) この理由は、 $o'-x'y'z'$ が剛体に固定されているため、 $o'-x'y'z'$ 軸の周りの質量分布は変化しないので、これらの軸の周りの慣性モーメントは一定となるからである。しかし、良いことばかりではなく、 $o'-x'y'z'$ は非慣性系であるから、前章で見たように慣性力が現れるので、それによる「見かけの力のモーメント」も出現し、複雑になることが予想される。 それにもかかわらず、慣性モーメントが時間変化しない方が扱いやすいならば有効な方法となる。

このように「剛体に固定した座標系」を採用するとしても、その剛体上への取り方は無限にあるであろう。しかし、後で述べるが座標を「慣性主軸」に設定するととても扱いやすくなる。以上のことを考慮して導かれるのが、「オイラー(Euler)の方程式」である。10.3節でこれを実際に導出する。

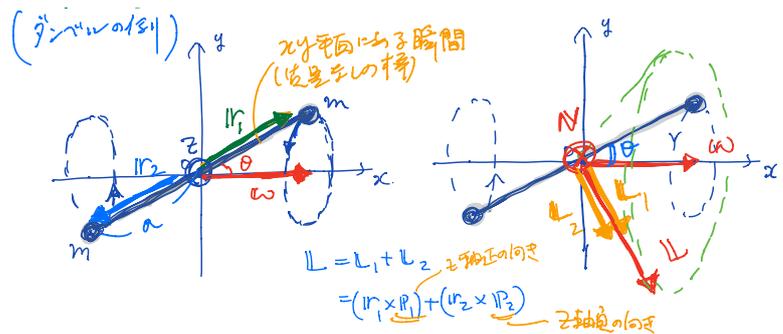
10.2 慣性テンソル

オイラーの方程式を求める前に、「慣性テンソル(tensor of inertia)」なる量について説明する。

まず、8.3節の復習として、右図のような、回転軸(z軸)の周りに対称的な剛体が回転している場合の、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と角運動量ベクトル \mathbf{L} の関係を見る。この場合は \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行で、 $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ と書けた。ここで、 I は慣性モーメントで「スカラー」量である。p.77の(8-3-8)式をみるか、(8-3-10)式の下注から分かるように、一般的な(非対称な)剛体では、 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行にならない。



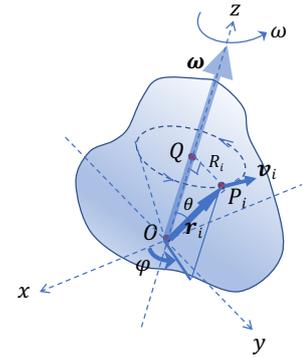
(例1) 平行にならない場合の簡単な例³(質量の無い長さ2aの棒で結ばれた同じ質量mの質点からなる系(ダンベル)の回転)を右の図に示しておく。 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行にならないことを図を見て確かめよ。演習15の2を参照せよ。
(このような場合、 \mathbf{N} がゼロにはならない事に注意)



³ 今井功監訳、「パークレー物理学コース1 力学」(丸善)の下巻の8章で、この例が詳しく取り上げられている。

次に、一般的なLとωの関係を調べる。

すでに、8.3.3節で示したことだが、右の図で、原点のまわりの全角運動量 L_{tot} は剛体を構成している質点 P_i の角運動量を L_i 、位置ベクトルを r_i 、速度ベクトルを v_i 、質量を m_i とすると、



$$L_{tot} = \sum_i L_i = \sum_i (r_i \times m_i v_i) = \sum_i (r_i \times m_i (\omega \times r_i)) = \sum_i m_i (r_i \times (\omega \times r_i))$$

と書ける。ここで、 $v_i = \dot{r}_i = \omega \times r_i$ を使った (演習14の1)。これに、ベクトルの3重積の公式、 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ を使うと、

$$L_{tot} = \sum_i m_i [(r_i \cdot r_i)\omega - (r_i \cdot \omega)r_i] \quad (8-3-8再掲)$$

となるのであった。

上の(8-3-8再掲) 式より、一般には L と ω が平行ではなく、 $L = I\omega$ のように、スカラー量 I を使ってこの式を表せないことがわかる。

そこで、この(8-3-8再掲) を、静止座標系 ($o - xyz$) での直交座標成分 (x成分、y成分、z成分) に分解してみよう。ただし、 $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ 、 $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とする。また、分解した各成分を行列の形でまとめる。実行すると、

$$\begin{cases} L_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - \sum_i m_i (x_i y_i) \omega_y - \sum_i m_i (x_i z_i) \omega_z \\ L_y = -\sum_i m_i (y_i x_i) \omega_x + \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \omega_y - \sum_i m_i (y_i z_i) \omega_z \\ L_z = -\sum_i m_i (z_i x_i) \omega_x - \sum_i m_i (z_i y_i) \omega_y + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$L = \tilde{I} \omega$
↑ tensor of inertia
↑ 慣性テンソル
↑ 各成分は時間の関数
⇒ 各点の座標は刻々と変化する

↑ 対角項 (対角項)
↑ 非対角項
↑ 慣性乗積 (product of inertia)
↑ 3x3の対称行列

のようになる。この結果より、 L と ω はスカラーではなく行列で表される量 \tilde{I} を使って、

$$L = \tilde{I} \omega \quad (10-2-1)$$

のように表現できることがわかる。この \tilde{I} を「慣性テンソル」とよぶ。 \tilde{I} の行列の成分は、上の図の中で定義されてる。 \tilde{I} 行列の対角項、 I_{xx} 、 I_{yy} 、 I_{zz} はそれぞれx軸、y軸、z軸のまわりの慣性モー

メントになっている（値は全て正）。非対角項の $I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}$ は「慣性乗積」と呼ばれる量（正にも負にもなる）で、その定義から $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$ なので、数学的には、慣性テンソルを表す行列は3行3列の対称行列になっている。これらの \tilde{I} の行列の成分は一般的に時間変化する。

今、仮にある座標系をとったとき、 \tilde{I} 行列の非対角項が全てゼロで、対角項しかないように（すなわち、 \tilde{I} が対角行列に）なったとする。3つの対角項が等しければ、 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は常に平行であることはすぐわかる。これに対し、それらの対角項に等しくないものが含まれる場合は、 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は常には平行でないが、3つの座標軸のまわりの回転に関しては平行になる。例えば、x軸のまわりの剛体の回転を考えると、 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, 0, 0)$ なので、行列の計算から $\mathbf{L} = (L_x, 0, 0) = (I_{xx}\omega_x, 0, 0)$ となる。よって、 $\mathbf{L} = I_{xx}\boldsymbol{\omega}$ 。これは、 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行であることを示している。一方、ある座標系をとったとき、 \tilde{I} の行列の非対角項にゼロでない成分が存在すれば（ \tilde{I} が対角行列でなければ）、一部の例外を除いて⁴、その座標系のどの座標軸の周りの回転に対しても \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行でない。こうして、 \tilde{I} 行列が対角行列になるような座標系を設定できれば、その剛体の回転に対してシンプルな記述ができることが予想される。（ \tilde{I} を $\boldsymbol{\omega}$ ベクトルに作用して \mathbf{L} ベクトルに変える演算子とみることもできる。この演算子は行列で表されている。一般に、行列をベクトルに作用させると、そのベクトルの向きと大きさは変わる。したがって、 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は一般には平行でないことがわかる。）

しかし、上で述べたように、ある軸のまわりに回転させると \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ が平行になる場合を見つけることができる。このような軸は、実は、どのような剛体でも3つ見つけることができ、それらの軸は直交している。これらの軸を慣性主軸(principal axis of inertia)という。数学的には、対称行列は必ず対角行列にできる座標軸を見つける事ができる事に相当する。このような問題を「行列の対角化」、とか「固有値問題」(eigen value problem)と呼ぶ。このようになる条件は $\mathbf{L} = \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$ であり、 $\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ (平行) のような場合であるから、 $\tilde{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ なるように λ と座標軸を決める問題である。新しい座標軸の単位ベクトルは固有ベクトル、 λ は固有値と呼ばれている⁵。このとき、 \tilde{I} は対角行列となり、対角成分には λ が入る。3つの λ は主慣性モーメントと呼ばれる。各慣性主軸のまわりの慣性モーメントに対応する。

式(10-2-1)は複雑な式であるし、すでに見てきたように慣性テンソルの各成分は「時間変化」をする。しかし、前節で述べたように、「剛体に固定された座標系」を導入したとしよう。すなわち、剛体に乗った座標を設定する。この場合、その座標系の各軸に対しての質量分布は時間変化しなくなる。よって、「剛体に固定された座標系」を導入する事により慣性テンソルの各成分が時間変化しないように記述できることになる。さらに、上で述べたように「剛体に固定された座標系」を慣性テンソルを表す行列が対角行列になるように剛体上に設定する（慣性主軸をとる）と、式(10-2-1)は3つの慣性モーメントのみで表現可能になる。すなわち、

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix} \quad (10-2-2)$$

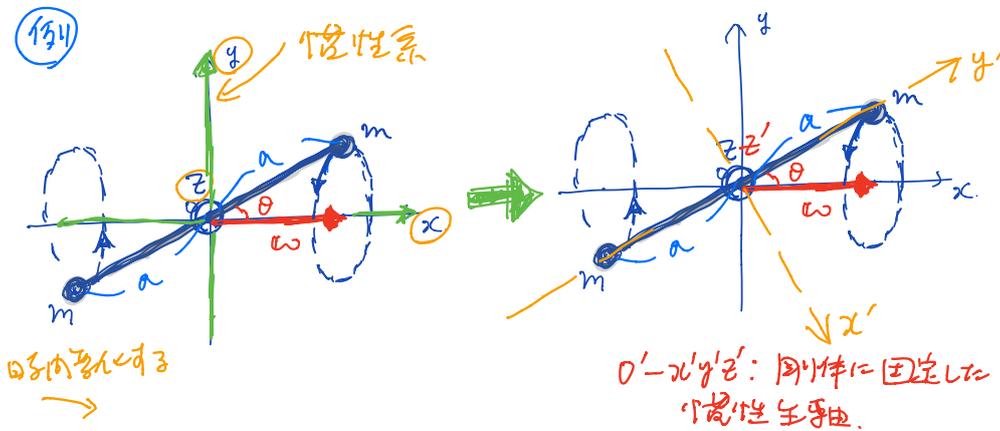
$$\mathbf{L} = \tilde{I}\boldsymbol{\omega} = I_{x'x'}\omega_{x'}\mathbf{e}_{x'} + I_{y'y'}\omega_{y'}\mathbf{e}_{y'} + I_{z'z'}\omega_{z'}\mathbf{e}_{z'} \quad (10-2-3)$$

のようなシンプルな式となる。ここで、 $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$ は剛体上に設定した各慣性主軸の単位ベクトルである。

⁴ 例えば、 $I_{xy} = I_{yx} \neq 0, I_{xz} = I_{zx} = 0, I_{yz} = I_{zy} = 0$ のような場合、z軸の周りの回転に対しては、 \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行になる。

⁵ 対称行列を対角化する固有ベクトルは互いに直交する。線形代数の教科書参照

(例2) p101の例1と同じダンベルの問題。左下図は静止座標系($o - xyz$)の場合、右下図は剛体上に設定した慣性主軸を座標系($o' - x'y'z'$)にとった場合である。慣性主軸がこの剛体の対称軸になっている事、3つの慣性主軸が直交していることを確かめよ。慣性主軸 x' 軸、 y' 軸、 z' 軸のまわりに回転した場合は、その対称性から \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ が平行となる (確かめよ。演習15参照)



10.3 オイラー(Euler)の方程式

前節で、「剛体に固定された座標系」を導入する事により慣性テンソルの各成分が時間変化しないように記述できることが示された。さらに、剛体の慣性主軸の座標系を選ぶ事により、角運動量は3つの慣性モーメントで表現できるシンプルな式(10-2-3)になることがわかった。

この節では、回転の運動方程式(10-1-1)がこの非慣性系である剛体に固定された慣性主軸の座標系でどのような式になるかを調べる。すなわち、慣性力(見かけの力)により「見かけの力のモーメント」がどのような形になるかを導出し、オイラーの方程式(剛体上でみた回転の運動方程式と言える)を求める。

以下に、 \mathbf{L} の時間変化を剛体に固定された慣性主軸の座標系で求める。 \mathbf{L} 自体は、静止座標系で見ようが、剛体に固定された座標系で見ようが変わらないので $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ であること、静止座標系の単位ベクトルは時間変化しないが、剛体座標系の単位ベクトルは時間変化する事に注意しよう⁶。

$\left\{ \begin{array}{l} o-xyz : \text{静止座標系 (慣性系)} \\ o'-x'y'z' : \text{剛体に固定した座標系} \\ \langle o \neq o' \text{は共通} \rangle \text{ (回転座標系)} \end{array} \right.$

\uparrow
 剛体の慣性主軸になる

$$\mathbf{L} = L_x \mathbf{e}_x + L_y \mathbf{e}_y + L_z \mathbf{e}_z$$

$$= L'_x \mathbf{e}'_x + L'_y \mathbf{e}'_y + L'_z \mathbf{e}'_z (= \mathbf{L}')$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (L'_x \mathbf{e}'_x + L'_y \mathbf{e}'_y + L'_z \mathbf{e}'_z)$$

座標軸が時間変化するからこのように書く

$$= \frac{dL'_x}{dt} \mathbf{e}'_x + \frac{dL'_y}{dt} \mathbf{e}'_y + \frac{dL'_z}{dt} \mathbf{e}'_z + L'_x \frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} + L'_y \frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} + L'_z \frac{d\mathbf{e}'_z}{dt}$$

$$= \left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta t} \right) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}') = \mathbf{N}'$$

⁶ $\frac{\delta}{\delta t}$ は剛体上に固定された座標系でみたときの \mathbf{L} の時間変化を表す記号である。ここでの導出は、回転座標系での議論(9.2節)と同じような流れになっている。よくわからなかった人は9.2節を再度読み返すこと。

上の図の式の最後のところは、 $\frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x$, $\frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y$, $\frac{d\mathbf{e}'_z}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_z$ なので、

$$L_{x'} \frac{d\mathbf{e}'_x}{dt} + L_{y'} \frac{d\mathbf{e}'_y}{dt} + L_{z'} \frac{d\mathbf{e}'_z}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times L_{x'} \mathbf{e}'_x + \boldsymbol{\omega} \times L_{y'} \mathbf{e}'_y + \boldsymbol{\omega} \times L_{z'} \mathbf{e}'_z = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}' \text{ となることを使った。}$$

結局、剛体に固定された座標系の回転運動方程式は

$$\frac{\delta \mathbf{L}'}{\delta t} = \mathbf{N}' - (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}') \quad (10-3-1)$$

となる。右辺の $-(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')$ が「見かけの力のモーメント」という事になる。 $\mathbf{N}' = 0$ でも、剛体に固定された（剛体に乗ってみた）座標系では、力のモーメント、 $-(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')$ が、あたかも働いているように見える、ということである。なお、 $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ 、 $\mathbf{N} = \mathbf{N}'$ 、 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$ なので、(10-3-1)式からダッシュを全て取り除いても良い。

式(10-2-3)を使うと、(10-3-1)式の左辺は、

$$\frac{\delta \mathbf{L}'}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} (I_{x'x'} \omega_{x'} \mathbf{e}_{x'} + I_{y'y'} \omega_{y'} \mathbf{e}_{y'} + I_{z'z'} \omega_{z'} \mathbf{e}_{z'}) = (I_{x'x'} \frac{\delta \omega_{x'}}{\delta t} \mathbf{e}_{x'} + I_{y'y'} \frac{\delta \omega_{y'}}{\delta t} \mathbf{e}_{y'} + I_{z'z'} \frac{\delta \omega_{z'}}{\delta t} \mathbf{e}_{z'})$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$, $\mathbf{e}_{z'}$ は剛体に固定された座標系の単位ベクトルであるから、剛体座標系の微分 $\frac{\delta}{\delta t}$ では変化しない事に注意せよ。

一方、右辺の $(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')$ は、

$$(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')_{x'} = \omega_{y'} L_{z'} - \omega_{z'} L_{y'} = \omega_{y'} (I_{z'z'} \omega_{z'}) - \omega_{z'} (I_{y'y'} \omega_{y'}) = (I_{z'z'} - I_{y'y'}) \omega_{y'} \omega_{z'}$$

同様にして、 $(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')_{y'} = (I_{x'x'} - I_{z'z'}) \omega_{z'} \omega_{x'}$ 、 $(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')_{z'} = (I_{y'y'} - I_{x'x'}) \omega_{x'} \omega_{y'}$ となる。

これらの結果より、(10-3-1)式は、

$$\begin{aligned} I_{x'x'} \frac{\delta \omega_{x'}}{\delta t} + (I_{z'z'} - I_{y'y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} &= N_{x'} \\ I_{y'y'} \frac{\delta \omega_{y'}}{\delta t} + (I_{x'x'} - I_{z'z'}) \omega_{z'} \omega_{x'} &= N_{y'} \\ I_{z'z'} \frac{\delta \omega_{z'}}{\delta t} + (I_{y'y'} - I_{x'x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} &= N_{z'} \end{aligned} \quad (10-3-2)$$

となる。これら3つの式をオイラーの方程式とよぶ⁷。(10-3-2)式の左辺第2項が見かけの力のモーメントの各成分（に-1を書けたもの）になる。

⁷ 式(10-3-1)もオイラーの方程式と呼ばれることがある。

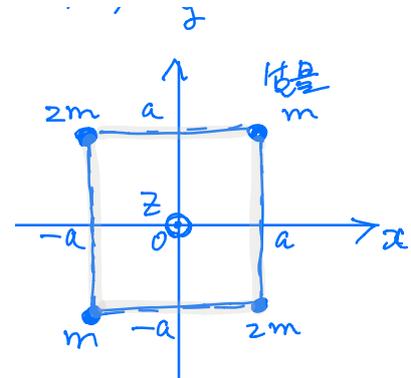
演習15

1. 図のように正方形の頂点に質点がある剛体を考える。質点間は質量が無く変形しない棒でつながっている。以下の問いに答えよ。

(1) 静止座標系($o - xyz$) で、図のような剛体に対する慣性テンソル \tilde{I} の行列を求めよ。

(2) \tilde{I} を対角化し、固有値 (慣性主軸に対する慣性モーメント) と固有値ベクトル (慣性主軸方向の単位ベクトル) を求めよ。

(3) 慣性主軸がどの方向になっているか、図中に示しなさい。



2. 図のようなダンベルの運動 (本文中の例題の図も見よ) について調べる。

(1) 静止座標系($o - xyz$) において、棒が xy 平面にある瞬間の全角運動量が

$$\mathbf{L} = 2m\omega a^2 \sin\theta (\sin\theta \mathbf{e}_x - \cos\theta \mathbf{e}_y)$$

となることを示せ。

(2) 静止座標系($o - xyz$) において、棒が xy 平面にある瞬間の力のモーメントが

$$\mathbf{N} = -2m\omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_z$$

となることを示せ。

(3) \mathbf{L} , \mathbf{N} はどのように時間変化をするか述べよ。

(4) 剛体に固定した慣性主軸の座標系($o' - x'y'z'$) をとったとき、主慣性モーメント、 I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} を求めよ。

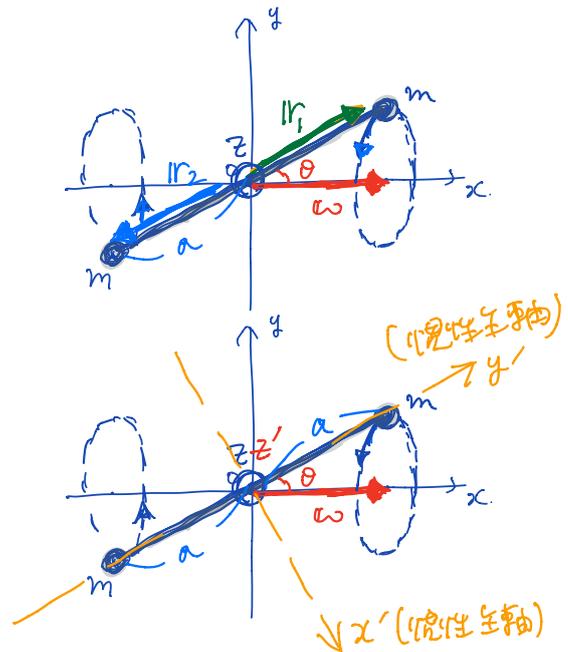
(5) $o' - x'y'z'$ で $\boldsymbol{\omega}$ の成分 $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ と \mathbf{L} の成分 $L_{x'}$, $L_{y'}$, $L_{z'}$ を求めよ。

(6) Euler の方程式より、

$$N_{z'} = -2m\omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta$$

となることを示せ。

(静止座標系で求めた(1)の答えと同じになる)



10.4 オイラーの方程式の応用

10.4.1 力のモーメントがゼロの場合

一番、簡単な場合として、力のモーメント \mathbf{N} がゼロの場合のオイラー方程式 ((10-3-1)、あるいは、(10-3-2)式) の解を調べよう。

(注) \mathbf{N} は \mathbf{N}_{tot}^{ex} を省略して書いたものなので、 $\mathbf{N} = 0$ とは、外力による力のモーメントが全く無いか、複数働いたとしても総和がゼロである場合のことである (例えば、一様な重力下で重心のまわりの回転を考えると、 $\mathbf{N} = 0$ となる)。

まず、すぐわかることは、

・ 静止座標系($o - xyz$)

この場合は、式(10-1-1)より $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} = 0$ であるから、

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \text{一定} \quad (10-4-1)$$

となる。当然であるが、角運動量は保存し、 \mathbf{L}_0 の向きも大きさも時間変化しない。

・ 剛体に固定した座標系($o' - x'y'z'$)

$\mathbf{N} = \mathbf{N}' = 0$ であるから、オイラーの方程式(10-3-1)より、

$$\frac{\delta \mathbf{L}'}{\delta t} = -(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}') \quad (10-4-2)$$

となる。前節でも述べたが、 o' 系は o 系に対して回転運動をしているので、 $\mathbf{N} = 0$ であっても、剛体上では、慣性力による見かけの力のモーメント $-(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}')$ が働くように見える。

(注) $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ なのであるから、 $\mathbf{N} = 0$ の場合は \mathbf{L}' も保存し ($\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{L}_0$)、時間変化してはおかしい? と
思う人がいるかもしれない。(10-4-2)の式は「回転する剛体上に乗った人には \mathbf{L}' が時間変化して見える」、
という意味である事に注意せよ (δ 微分はそのような意味であった)。剛体の方が回転する (座標軸が
回転する) ために、そのように見えるだけのことで、静止座標系から見れば、もちろん角運動量は保存
し、時間変化はしていない。

なお、(10-4-2)式より、角速度ベクトルと角運動量が平行である場合 (例えば、10.2節で述べたようにその剛体の慣性主軸で回転する場合は、 $(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}') = 0$ であるから剛体上から見ても \mathbf{L}' は時間変化しない (この時は、 \mathbf{L}' に平行である $\boldsymbol{\omega}'$ も時間変化しない)。

オイラーの方程式(10-3-2)の方は、

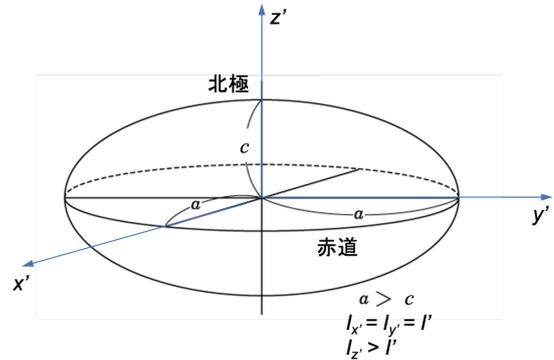
$$\begin{aligned} I_{x'} \frac{\delta \omega_{x'}}{\delta t} + (I_{z'} - I_{y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} &= 0 \\ I_{y'} \frac{\delta \omega_{y'}}{\delta t} + (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{z'} \omega_{x'} &= 0 \\ I_{z'} \frac{\delta \omega_{z'}}{\delta t} + (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} &= 0 \end{aligned} \quad (10-4-3)$$

となる。ただし、主慣性モーメント $I_{x'x'}$, $I_{y'y'}$, $I_{z'z'}$ は表記を簡単にするため、 $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ とした。

10.4.2 地球の自由（正常）歳差運動

地球にはいくつかの周期の歳差運動が存在していることが知られている。その一つは、太陽からの潮汐力による力のモーメントによって起こるもので、周期は2.6万年程度だと言われている⁸。また、これに加えて、地球の極が約430日周期で歳差運動する事も知られている⁹。この短周期の歳差運動を最初に予言したのはオイラーで、地球を回転楕円体の剛体と近似し、 $N = 0$ の場合のオイラー方程式の解として求めた。以下に、それを(10-4-3)式のオイラー方程式を使って求めてみよう。

地球を右図のような回転楕円体の剛体で近似し、長軸の半径は赤道半径 a ($=6378$ km)、短軸の半径は極半径 c ($= 6357$ km) である。わずかな差しかないが $a > c$ である。剛体に固定した座標軸 x', y', z' は右図のように慣性主軸になるようにとる。慣性主軸のまわりの慣性モーメントは、



$$I \equiv I_{x'} = I_{y'} = 0.3296 Ma^2, \quad I_{z'} = 0.3307 Ma^2 \text{ となる。}$$

(ここで、 M は地球の質量、 $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg . また、 $I_{x'} = I_{y'}$ なので、これらを I と書く事にする)。 $I_{z'} > I$ である事に注意。

オイラーの方程式(10-4-3) にこれらの条件を入れ、両辺を I で割ると、

$$\frac{\delta \omega_{x'}}{\delta t} + \frac{(I_{z'} - I)}{I} \omega_0 \omega_{y'} = 0 \tag{10-4-4}$$

$$\frac{\delta \omega_{y'}}{\delta t} - \frac{(I_{z'} - I)}{I} \omega_0 \omega_{x'} = 0 \tag{10-4-5}$$

$$\frac{\delta \omega_{z'}}{\delta t} = 0 \tag{10-4-6}$$

となる。なお、式(10-4-6)から、ただちに $\omega_{z'} = \text{一定} (\equiv \omega_0)$ であることがわかるので、(10-4-4)、(10-4-5)式において $\omega_{z'}$ を ω_0 とおいた。

ここで、
$$\Omega \equiv \frac{(I_{z'} - I)}{I} \omega_0 \tag{10-4-7}$$

とおくと、(10-4-4)、(10-4-5)式は、

$$\dot{\omega}_{x'} + \Omega \omega_{y'} = 0, \tag{10-4-8}$$

$$\dot{\omega}_{y'} - \Omega \omega_{x'} = 0 \tag{10-4-9}$$

の連立微分方程式になる¹⁰。(10-4-8)式を更に時間微分し、(10-4-9)を代入すると、

$$\ddot{\omega}_{x'} + \Omega \dot{\omega}_{y'} = \ddot{\omega}_{x'} + \Omega(\Omega \omega_{x'}) = \ddot{\omega}_{x'} + \Omega^2 \omega_{x'} = 0 \text{ となる。}$$

⁸ 大島隆義著、「力学読本 自然は方程式で語る」(名古屋大学出版会)の17-3-3節(b)参照

⁹ 1891年、Chandler等によって観測された。430日はChandler周期とも呼ばれている。

¹⁰ ここで、ドットは剛体に固定された座標系での時間微分 ($\delta/\delta t$) とする。剛体に乗って見る限りは、通常の微分と同じ演算ができる。

最後の式は、
$$\frac{\delta^2 \omega_{x'}}{\delta t^2} = -\Omega^2 \omega_{x'} \quad (10-4-10) \quad \text{となる。}$$

この微分方程式は、単振動の方程式であるから、その解は、

$$\omega_{x'} = A \cos(\Omega t + \delta_0) \quad (10-4-11)$$

と書ける。ここで、 A, δ は初期条件で決まる定数。また、(10-4-9)に(10-4-11)を代入して、

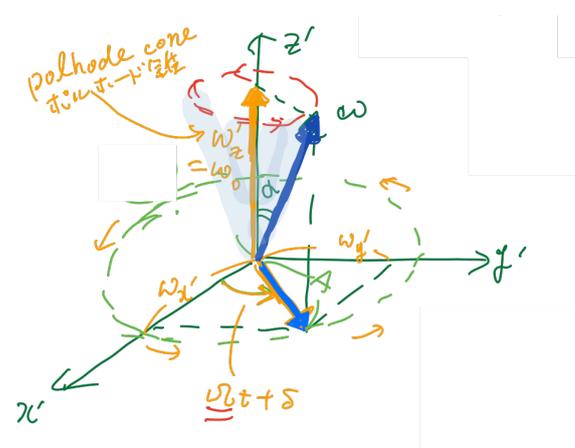
$$\omega_{y'} = A \sin(\Omega t + \delta_0) \quad (10-4-12)$$

が得られる。(10-4-11) と(10-4-12)式より、

$$\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 = A^2 \quad (10-4-13)$$

となる。

(10-4-13)式は半径Aの円の式であるから、右図のように、 ω ベクトルの $x'y'$ 面への射影成分は、地球（剛体）に固定した座標系において、一定の角速度 Ω で円運動を描くことがわかる。また、 z' 成分は ω_0 で一定である。したがって、 ω は z' 軸の周りに一定の傾きを持って角速度 Ω で歳差運動をすることがわかる。



ω ベクトルの作る円錐はpolhode¹¹（ポルホード錐）と呼ばれる。なお、 z' 軸からの傾き α は一義的に決まるもではなく、初期条件で決まる事に注意。

実際の極のずれの観測値は理科年表によると、 $\alpha \sim 4.4 \times 10^{-5} \text{deg}$ 程度であるから、かなり小さな値である。

ここで、極の歳差運動の評価をしてみよう。 $I = 0.3296 Ma^2, I_z = 0.3307 Ma^2$ を使うと、

(10-4-7)式より、 $\Omega \sim \frac{1}{300} \omega_0$ となる。よって、歳差運動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \sim 300 \frac{2\pi}{\omega_0} = 300 \times 2\pi \times \frac{1 \text{ day}}{2\pi} = 300 \text{ days}$$

となり、周期は約300日という結果が得られた。オイラーは18世紀に初めてこれを計算した。しかし、この予測は、実際のChandlerの観測値 約430日とは異なる。これは、質量密度が内部で高いとか、海流の移動の影響など、地球が完全な剛体ではないことによると考えられている。いずれにしても、力のモーメントが0の場合、回転軸が慣性主軸からずれているなら、回転軸が歳差運動する。これは正常（自由）歳差運動と呼ばれており、Chandler周期の歳差運動は、これが原因となって生じると考えられる。

¹¹ polhodeとはギリシア語からの造語で「極のたどる道」の意味だと言われている。

補足として、 ω ベクトルと角運動量ベクトル L の関係を見ておく。

地球の場合、 $I (= I_{x'} = I_{y'}) < I_{z'}$ であるから、全ての主慣性モーメントが等しくない。よって、 ω ベクトルと角運動量ベクトル L は平行ではない。これは、実際に、(10-2-3)式より、

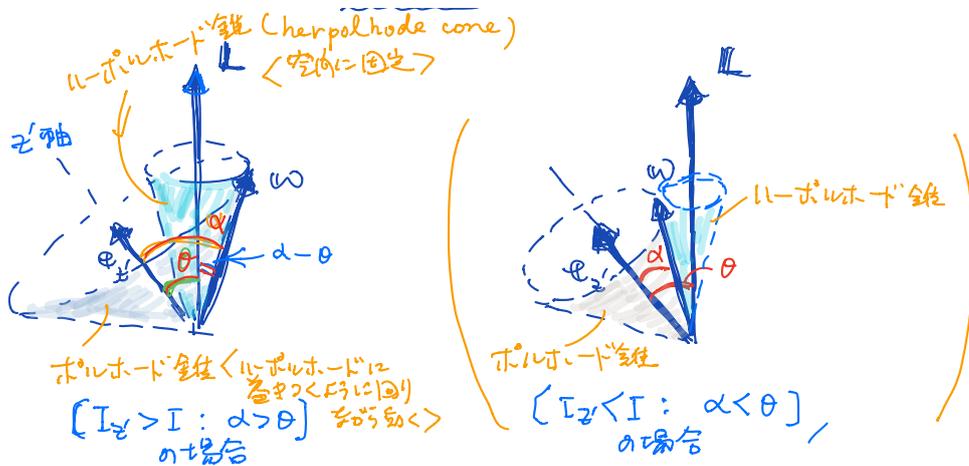
$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \tilde{I}\boldsymbol{\omega} = L_{x'}\mathbf{e}_{x'} + L_{y'}\mathbf{e}_{y'} + L_{z'}\mathbf{e}_{z'} \\
 &= I\omega_{x'}\mathbf{e}_{x'} + I\omega_{y'}\mathbf{e}_{y'} + I_{z'}\omega_0\mathbf{e}_{z'} \\
 &= I(\omega_{x'}\mathbf{e}_{x'} + \omega_{y'}\mathbf{e}_{y'}) + I_{z'}(\omega_0\mathbf{e}_{z'}) \quad (10-4-14)
 \end{aligned}$$

であることからわかる。この式の右辺第1項 $I(\omega_{x'}\mathbf{e}_{x'} + \omega_{y'}\mathbf{e}_{y'})$ は L ベクトルの $x'y'$ 平面への射影成分を表すが、 ω ベクトルの $x'y'$ 平面への射影成分 $(\omega_{x'}\mathbf{e}_{x'} + \omega_{y'}\mathbf{e}_{y'})$ と比例しているため、 ω の $x'y'$ 平面への射影成分と L の射影成分は同じ方向を向くことを意味する。すなわち、 L は、 ω と z' 軸の作る面に常に乗っている¹²ことがわかる。(10-4-14)の右辺第2項からは、 $I (= I_{x'} = I_{y'}) < I_{z'}$ なので L と z' 軸となす角を θ とすると $\tan \alpha = A/\omega_0$ 、 $\tan \theta = IA/I_{z'}\omega_0 = (I/I_{z'})\tan \alpha < \tan \alpha$ となる。これより、 $\theta < \alpha$ なので、 L と z' 軸となす角はこ ω と z' 軸となす角より小さいとを示している。

結局、地球に固定された慣性主軸の座標系から見ると、 L も ω も z' 軸の周りを角速度 Ω で歳差運動をする。ただし、 ω の作る円錐面は L の作る円錐面の外側になる。

この結果を、静止座標系 (慣性系 $o-xyz$) からはどう見えるかをこの節の最後に述べておく。

10.4.1節で述べたように、 $\mathbf{N} = 0$ であるから、 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 =$ 一定で、角運動量は保存し、その向きも大きさも変わらない。そこで、 L を基準に考えると、上の結果は、下図のように ω も $e_{z'}$ も L の周りを回ることを示している。 L の周りで ω のつくる円錐はハーポルホード(herpolhode)錐と呼ばれている。



¹² $e_{z'}$ と $\omega \times L$ の内積がゼロであることからわかる (これを示さない)

10.4.3 回転の安定性

すでに、10.2節で述べたように、剛体に必ず存在する3つの直交する慣性主軸のどれかの周りに剛体を回転させれば、 L と ω は平行になる。力のモーメントの総和 N がゼロの場合は、角運動量 (L) が保存する (向きも大きさも変化しない) ので L に平行な ω の向きも時間変化することはない。したがって、慣性主軸の周りに回転させれば、その回転は安定になるような気がする。しかし、 L と ω は平行になるからと言って、その回転が必ずしも安定とは限らないのである。回転の安定性はどうか、といった時、わずかな力のモーメントを短い時間与えて、その回転軸の向きをわざとずらした時、その回転軸が元の回転軸周辺にとどまるか、どんどんずれていってしまうかを言っているのである。前者の場合は、回転が安定であり、後者の場合、不安定という事にする。

どの慣性主軸が安定かの評価は、オイラーの方程式をつかって求めることができる。ここでは、その証明¹³は抜きにして結果だけを述べる。

(1) 3つの主慣性モーメントがどれも異なっている時

安定：慣性モーメントが最大と最小の大きさの慣性主軸の周りの回転

不安定：慣性モーメントが中間の大きさの慣性主軸の周りの回転

(2) 2つの主慣性モーメントが等しい時

安定：異なる慣性モーメントを持つ慣性主軸 (対称軸という) の周りの回転

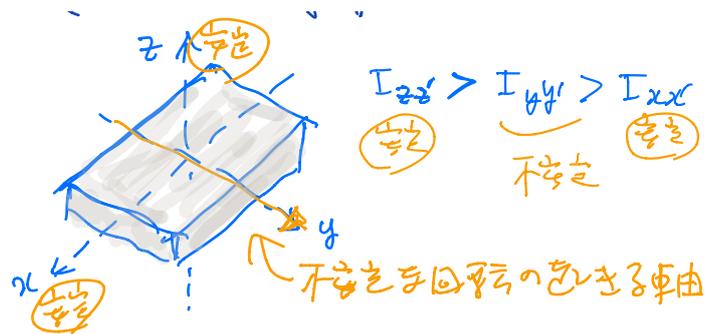
(3) 3つの主慣性モーメントがどれも同じ時

常に安定な回転

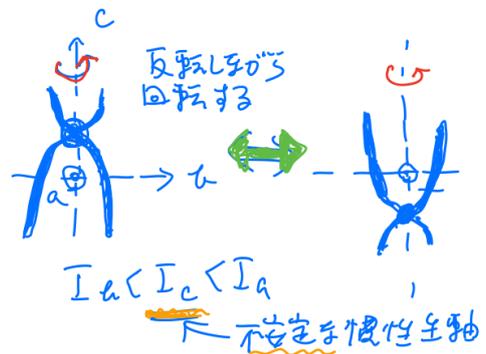
どのような剛体にも必ず慣性主軸があるので、安定な回転軸は必ず存在する事になる。

(例1) 右図のような直方体の回転 (実際に直方体の箱を見つけて、3つの軸の周りに回転させてみよ)

不安定な回転はy軸のまわりの回転で起こる。



(例2)スペースシャトルの無重力状態の中で、右図のようにペンチが反転しながら複雑な回転をするのを見たことがあるだろう。(見たことのない人は、ネット上で探して見てみると良い¹⁴)。この運動は複雑ではあるが、不安定な慣性主軸(c軸)のまわりの回転で生じている¹⁵。(詳細は、皆さんの自由研究としておく)



¹³ 安井久一著「物理学演習Onepoint3 こまはなぜ倒れないか」(共立出版) 2.4節参照

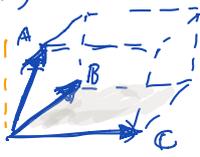
¹⁴ YouTube 「ペンチの回転」など。

¹⁵ 川畑ら、「無重力状態での剛体の回転運動と可視化」https://www.fit.ac.jp/elec/7_online/kawabata/koutai/pench/pench.html

10.4.4 回転のエネルギー¹⁶

固定点のまわりの剛体の回転運動のエネルギーは、式(10-4-15)、あるいは、(10-4-16)のように書ける。

証明

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot v_i && (v_i = \omega \times r_i) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{(\omega \times r_i)}_A \cdot \underbrace{(\omega \times r_i)}_B \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega \cdot \underbrace{(r_i \times (\omega \times r_i))}_C && A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) \\
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_{i=1}^N m_i r_i \times \underbrace{(\omega \times r_i)}_D \\
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_{i=1}^N (r_i \times p_i) = \frac{1}{2} \omega \cdot L && \text{— 空. (}\omega \text{ と } L \text{ の相互変換は等価的)}
 \end{aligned}$$


(10-4-15)

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_x' e_x' + \omega_y' e_y' + \omega_z' e_z' \\
 L &= (I_x' \omega_x') e_x' + (I_y' \omega_y') e_y' + (I_z' \omega_z') e_z' \\
 \omega \cdot L &= I_x' \omega_x'^2 + I_y' \omega_y'^2 + I_z' \omega_z'^2 \\
 T &= \frac{1}{2} (I_x' \omega_x'^2 + I_y' \omega_y'^2 + I_z' \omega_z'^2)
 \end{aligned}$$

(10-4-16)

剛体の運動はさらにいろいろな話題があるが、これでひとまず終わる。

力学ICDの講義もこれで終わるが、物理学科の学生は、次に、「解析力学」をマスターすることが必修である。

¹⁶ 補足。講義ではやっていない。回転エネルギー保存とオイラーの方程式を組み合わせると問題を解くことも良くある。

参考文献

講義で参考した基本的な文献は、

- ・大島隆義：「力学読本 自然は方程式で語る」 (名大出版会)
力学全般にわたって丁寧にわかりやすく書かれている
- ・今井 功監訳：「バークレー物理学コース1 力学 上下」 (丸善)
下巻の剛体の章は詳しく書かれている。
- ・安井久一：「物理学演習One Point こまはなぜ倒れないか」 (共立出版)
タイトルは「こま」となっているが、剛体の運動全体について詳しく書かれている良書
- ・鈴木真二：「Mathematicaで学ぶシリーズ3 力学入門」
Mathematicaの版は古い。薄い本ではあるが、質点系、剛体の運動についてはわかりやすく要点がまとめられている。
- ・ゴールドスタイン (野間、瀬川訳)：「物理学叢書11 古典力学」 (吉岡書店)
解析力学から出発し、力学全般を詳しく扱っている。

そのほか、参考にした文献は、

- ・後藤憲一、山本邦夫、神吉健共編「詳解 力学演習」 (共立出版)
ともかく多くの問題がのっている。
- ・大槻義彦：「物理学総論1 力学」 (学術図書出版)
厚い本ではないが、要領よく力学全般がのっている。剛体や回転座標系、相対論も扱っている。
- ・ファインマン (戸田、川島訳)：「ファインマン流 物理がわかるコツ」 (岩波書店)
ジャイロスコープのところを参考にした。
- ・山崎詩郎：「ブルーバックス 独楽 (こま) の科学」 (講談社)
原理などの説明については、気になる点が多々あるので注意が必要。しかし、コマの競技で勝つための観点から様々な種類のコマについて書かれているので、その意味では面白い。

このほか、ランダウの「力学」も解析力学から出発してコンパクトにまとまっている。また、最近、多くの力学の本がでていて、Web上にも優れたノートや解説が多く公開されている。また、参考になるシミュレーションや動画も数多く公開されている。紹介しきれないので省略する。