

## 8.6 コマの運動

コマは回転していない時はすぐに倒れるが、回転している時は倒れずに歳差運動(precession) を始める。現在でも、この「回転しているコマは何故倒れないのか」という不思議さに対して、数えきれないくらいの解説本が書かれている。多数のコマの本が書かれているということは、逆にいうと、その直感的な説明が難しいことを意味している。

「読者をわかった気にさせる」という事に、なかなか成功しないのだろう。しかし、我々は、これまで学んできた質点系や剛体の運動の自然な延長線上に「コマの運動」を理解できる。その手がかりになるのは回転の運動方程式である。

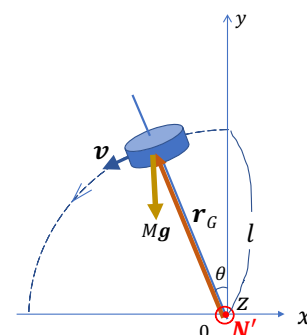
コマの回転軸の向きは時間変化するので、固定軸の回転運動の式ではなく、ベクトルで書かれた(8-1-2)式の回転の運動方程式  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}_{tot}^{ex}$  が手掛かりとなる。この式はベクトルの関係式なので、左辺と右辺のベクトルの向きと大きさが等

しくならないといけない。以下に、コマは倒れずに歳差運動する場合に、「角運動量の時間変化 $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ の向き」と「力のモーメント $\mathbf{N}_{tot}^{ex}$ の向き」が一致することを示すことにする。また、両者の大きさが等しいことから歳差運動の角速度を求める事ができる。

### 8.6.1 コマが回転していない場合

コマを図のように円板と質量の無視できる中心軸からなるもの(対称コマ)と簡略化して考える。今、軸が鉛直方向から $\theta$ 傾いて $xy$ 平面内にあるとする。コマが回っていない時はコマの中心軸の周りの角運動量はゼロであるが、重力 $M\mathbf{g}$ はコマの軸を図のように $xy$ 平面の中で回すような力のモーメント

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g} = Mgl \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (8-6-1)$$

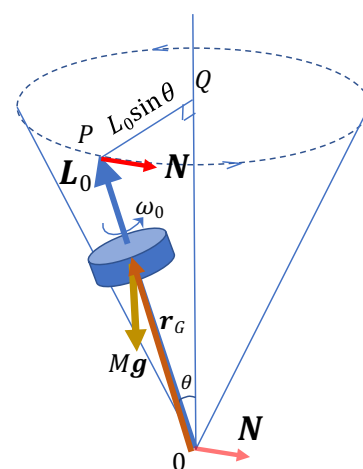


として働くので、コマは $z$ 軸の周りに回転して倒れる。(ここで、 $l$ は図のようにコマの軸にそってO点からコマの重心までの距離とした。)

この場合の運動については、演習13の間1を見よ。(注)床からの抗力による力のモーメントも考えられるが、抗力はO点に働くので、抗力からのO点の周りの力のモーメントはゼロになる。よって、重力による力のモーメントのみ考えれば良い。

### 8.6.2 コマが回転している場合

次に、右図のようにコマが角速度 $\omega_0$ で中心軸の周りに回っているとしよう。コマの原点の周りの角運動量 $\mathbf{L}_0$ は、コマの中心軸(回転軸)の周りの慣性モーメントを $I_0$ とすれば、式(8-3-8)と(8-3-10)より、向きが図のようにコマの中心軸上向き(O点からP点の向き)で、大きさは $L_0 = I_0 \omega_0$ となる。<sup>1</sup>



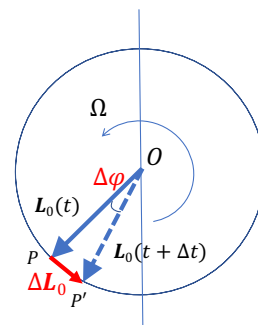
$\mathbf{L}_0$ の向きがOPの向きになる理由は、このコマが中心軸に対称的になっており、

コマを構成している各質点の $\mathbf{L}_i$ が中心軸から傾いていたとしても、逆に傾いている $\mathbf{L}_j$ が中心軸を挟んで反対側に存在するので中心軸成分以外はキャンセルするからである。

一方、O点の周りの重力による力のモーメントは前節で求めたように、 $\mathbf{N}_0 = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}$ で、その大きさは $|\mathbf{N}_0| = Mgl \sin \theta$ 、向きは図に示したように $\triangle OPQ$ の作る面に垂直となる。これは

<sup>1</sup> この場合、コマの角運動量 $\mathbf{L}_0$ はコマ自身の「角速度ベクトル」 $\boldsymbol{\omega}_0$ と平行になっている。8.3.2, 8.3.3節参照

コマが倒れずに、OQ軸（y軸）の周りに角度 $\theta$ を保って歳差運動したとした時、 $\mathbf{L}_0$  がたどる軌跡の円（半径  $L_0 \sin \theta$ ）の P 点での接線方向にもなっている。



コマがこのような運動をしているとするならば、 $\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{N}_0$  が成り立っていないといけない。すなわち、「 $\mathbf{L}_0$ の時間変化（これもベクトル）の向き」はベクトル  $\mathbf{N}_0$ の向きと同じになっている必要がある。

本当にそうになっているか、確かめてみよう。

右上の図は前頁の図を真上から見た場合の図である。歳差運動している場合は、右上の図のように $\mathbf{L}_0$ の先端が円運動する。今、時刻  $t$  の時の  $\mathbf{L}_0(t)$  が  $\Delta t$  後に  $\mathbf{L}_0(t + \Delta t)$  に回転したとしよう。その差  $\Delta \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(t + \Delta t) - \mathbf{L}_0(t)$  は図のようにPからP'に向かうベクトルになる。これをスカラー量  $\Delta t$  で割った  $\Delta \mathbf{L}_0 / \Delta t$  もやはり $\Delta \mathbf{L}_0$ と同じ向きを向くが、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限では  $\Delta \mathbf{L}_0 / \Delta t \rightarrow d\mathbf{L}_0 / dt$  となり、その向きはP点での円の接線方向になる。これは、まさしく $\mathbf{N}_0$ の方向であった。こうして、 $\mathbf{N}_0$  と  $d\mathbf{L}_0 / dt$  が同じ向きとなる事が示された。

結局、コマは回転の方程式を満たすような向きに、倒れずに歳差運動している事がわかる<sup>2</sup>。

さらに、 $\mathbf{N}_0$  と  $d\mathbf{L}_0 / dt$  の大きさも等しいという条件から「歳差運動の角速度」 $\Omega$  を求める事ができる（演習で求める）。その大きさは  $\Omega = \frac{Mgl}{I_0 \omega_0}$  (8-6-2) となる。

## 8.7 ジャイロスコープとジャイロ効果

### 8-7-1 ジャイロスコープ

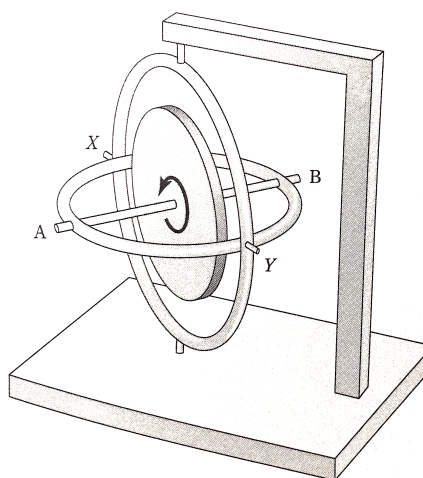
前節のコマのように回転子の中心に軸を通したようなもの（ジャイロと呼ぶことにする）が床の上ではなく外力の無い空間（例えば、無重力空間）にあったとしよう。そこには力のモーメント $\mathbf{N}_{tot}^{ex}$  は存在しないので、

回転の運動方程式  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}_{tot}^{ex} = 0$  よりコマの角運動量

$\mathbf{L}$  は時間変化せず常に一定である（角運動量保存）。 $\mathbf{L}$  が時間変化しないということは、 $\mathbf{L}$ の向きも大きさも変

化しない、ということなので、最初、コマがある方向に回転軸を向けて回っていたとしたとすると、その軸の向きに角運動量ベクトル ( $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$ ) が向いているから「回転軸の向きを変えることなし」にずっと同じ角速度  $\omega$  で回り続ける。これは、ある意味、磁気コンパス（方位磁石、磁気羅針盤）と似ている。最初に回転軸をある方向に合わせておけば、その後はその向きは変化しない。これを実用化できれば磁気コンパスに変わるものとして活用できそうである。

しかし、ジャイロを支えなしに空中に浮かべることはできないので、図のような支持枠に取り付けたジャイロを考えよう<sup>3</sup>。このような装置を「ジャイロスコープ (gyroscope)」という。

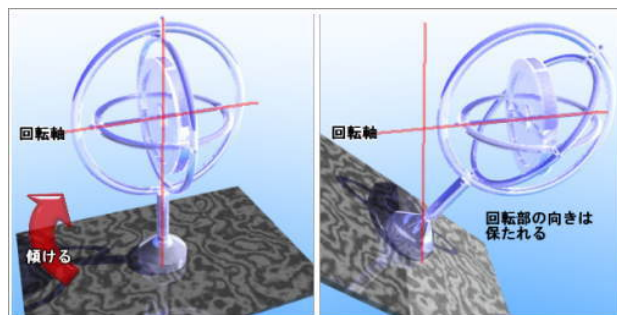


<sup>2</sup> これは、コマが重力を受けている向きと垂直である事に注意せよ。8-7-2節で扱うジャイロ効果である。

<sup>3</sup> 戸田他訳「ファインマン流 物理がわかるコツ」岩波書店 第4章の図4-1

この特別な支持枠によって、ジャイロの回転軸ABは任意の方向を向く事が可能である。X, Yの支持部分で回転軸は任意の上下の角度を、P, Qの上下の支持部分で回転軸は左右の任意の角度に向ける。

ジャイロスコープが地球上の重力下にあるような場合ではどうであろうか。その場合、重力は回転子の重心に鉛直方向下向きに作用するが A, Bの支持点では上向きに抗力が働くため、これらの力のモーメントは打ち消しあって  $N_{tot}^{ex} = 0$  となり、回転子の角運動量は保存する。すなわち、回転軸ABの向きは、重力下で支持枠を任意の方向に傾けたとしても変化しない

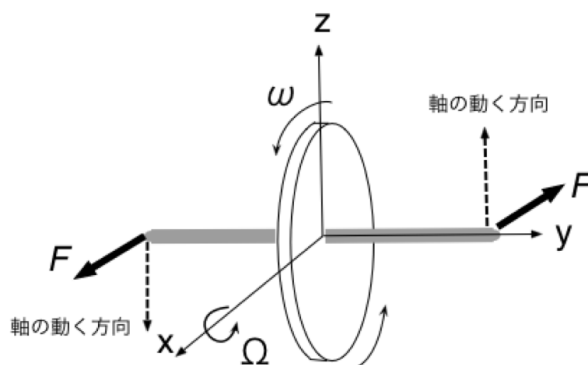


(右上の図を見よ<sup>4</sup>)。最初に回転軸を北に合わせておけば、この装置を乗せた飛行体が向きを変えながら飛んだとしても、原理的には、その回転軸の向きは変化しないことになる。まさに、磁気コンパスに似た振る舞いをすると言える。

しかし、向く方向は北に限定されないこと、装置の周りの磁気に左右されないこと、などの利点があるため、飛行機などの機体の姿勢制御などに使われている。ただし、実際には、回転体を常に回し続けるためモーターが付けられている。また、支持枠での摩擦などのために、ある時間たてば正しく同じ方向を向いていなくなる。これを補正するため様々な工夫が必要となる<sup>5</sup>。さらに、精度を上げるためには、かなり大きな回転子が必要になるので装置をコンパクトにする事が難しい<sup>6</sup>。

## 8-7-2 ジャイロ効果

前節のジャイロスコープで、前頁の図のA点を下向きに押したとしよう。予想に反して、ジャイロの回転軸ABは下向きには動かず、反時計回り(Y点のある方に)回転を始める。すなわち、回転軸に直角に力を加えると、回転軸は力の方向と垂直にふれる。これを「ジャイロ効果 (gyro effect)」という。



支持枠自体はこの効果に無関係なので、支持枠を取り除いた上の図で説明する(ここでは重力は考えない<sup>7</sup>)。回転軸の両端にx軸方向に力<sup>8</sup>を加えると、回転軸は力の方向に回転せず(z軸の周りに回転せず)、それと直角な方向に動き始める(x軸の周りに回転する)。このようになる理由は演習で考えることにする。コマの場合を振り返ると、重力はコマの回転軸を倒そうとするが、回転軸は倒れずにそれと直角方向に移動して歳差運動を始めた。これもジャイロ効果だという事がわかる。

<sup>4</sup> <http://www.s-graphics.co.jp/tankentai/news/gyroscope.htm> (気になる探検隊) より

<sup>5</sup> この講義では、この工夫の詳細は述べないが、例えば、回転軸が常に水平になるように重りをつけたジャイロスコープでは、回転軸は(磁極ではなく)真の地球の自転軸を向く。これは「**ジャイロコンパス**」と呼ばれている。

<sup>6</sup> 最近では、次章で扱う「**コリオリの力**」を利用した「**振動ジャイロスコープ**」などが使われることも多い。クォーツなどの振動軸が自由に回転できるようにした装置で、これを乗せた乗り物が向きを変えたりすると、その振動軸が回転を起こす(フーコーの振り子と同じ原理)のを検知するようになっている。安価で、かなりコンパクトにできるため、そのジャイロセンサーはスマートホンなどにも搭載されている。

<sup>7</sup> ジャイロスコープの時の図とは位置関係や回転方向なども異なっているので注意

<sup>8</sup> この図のように軸の両端に反対向きに加わる力を「**偶力**」と呼んでいる。これは重心を移動させず回転のみ起こす。

## 演習13

1. コマが回っていない場合コマは倒れるが、これは、コマに重力の力のモーメントが働いて床と接している点Oでコマの軸がp.85の上の図のようにxy面内で回転するからだと考えられる。この時の力のモーメントは式(8-6-1)  $\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g} = Mgl \sin \theta \mathbf{e}_z$  と書けることはすでに8.6節で述べた。以下の設問に答えよ。

- (1) コマの重心のO点の周りの角運動量  $\mathbf{L} = \mathbf{r}_G \times \mathbf{P}_G$  ( $\mathbf{P}_G$ は重心の運動量) の向きと大きさを求めよ。ただし、大きさは  $l, \theta, M, g$  を使って表せ。
- (2) 回転の運動方程式より  $\theta$  の満たす方程式を求めよ。
- (3) これより、鉛直方向からわずかに傾いた回転していないコマはどのように倒れていくかを述べなさい。(上の方程式を解く必要はない)

2. コマが回っているときは倒れずに歳差運動を起こすが、歳差運動の角速度  $\Omega$  が式(8-6-2)  $\Omega = \frac{Mgl}{I_0\omega_0}$  で表されることを示しなさい (8.6節の図や記号を使って良い)。

3. 8.7.2節の図のようにy軸のまわりに質量の無視できる軸のついた円板が高速に回転しているジャイロがあったとする(角速度の大きさ  $\omega$ 、角運動量の大きさを  $L$  とする)。この物体の中心軸の周りの慣性モーメントを  $I$  とすると、 $L = I\omega$ 。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、この問題では重力は考えない。

- (1) 角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  と角運動量ベクトル  $\mathbf{L}$  の向きを求めよ。
- (2) このジャイロの中心軸を  $x$  軸のまわりに角速度  $\Omega$  ( $\ll \omega$ ) で回したい。これに必要な力のモーメント  $\mathbf{N}$  の大きさと向きを求めよ。
- (3) このときジャイロの中心軸には軸が動く方向と直角に偶力 ( $\mathbf{F}$ ) を図のように加えなくてはならないことを示せ。
- (4) 軸が動く方向、 $\mathbf{F}$ 、角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  の間の向きの関係を調べよ。
- (5) ベクトル  $\mathbf{N}$ 、 $\boldsymbol{\omega}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}$  の間の向きの関係を調べよ。

4. (課題) ジャイロ効果は体験するのが一番良いので、ジャイロ効果を示すような実験を実際にやってみよ (例えば「地球コマ」やその類似品を手にいれると8.7.2の効果を実際に試すことができる)。もし難しい場合はインターネット上で公開されているジャイロ関連映像を探して、この題材に関し理解を深めよ。