

8.4 慣性モーメント

すでに述べてきたが慣性モーメントは回転の慣性の度合いを表す量である。剛体に設定した固定軸から剛体を構成している各質点までの距離を R_i とすると、固定軸の周りの慣性モーメント I は式(8-3-4)、

$$I = \sum_i (m_i R_i^2) \tag{8-3-4 再掲}$$

で与えられた。この式より、慣性モーメントは質量だけで決まらず、固定軸から質量がどのような分布で配置しているかが重要になる事がわかる。すなわち、同じ全質量を持つ場合でも、固定軸から遠い位置に質量が集まっている方が慣性モーメントは大きくなる。なので、同じ剛体でも、固定軸の取り方によって慣性モーメントの値は変わる。例えば、棒をその中心（重心）を持って回すのと、棒の端を持って回すのでは、回しやすさが異なるのを経験しているだろう。これは、端を固定軸とした方が慣性モーメントがより大きいからである¹。

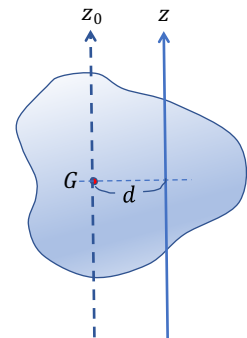
様々な形状の剛体の慣性モーメントをあらかじめ計算して置くと実用的なので、すでに、そのような表はたくさん作られており公開されている。しかし、全ての固定軸の周りで計算してあるわけではない。そこで、最初に、慣性モーメントの計算に有用な定理を二つ紹介する。

8.4.1 平行軸の定理

右図のような質量 M の剛体の重心 G を通る固定軸 (z_0 軸とする) と平行で距離が d 離れた固定軸 (z 軸とする) の周りの慣性モーメント I は、 z_0 軸の周りの慣性モーメント I_G を使って、

$$I = I_G + Md^2 \tag{8-4-1}$$

となる。これを「平行軸の定理」という。



(証明) 右図は上の剛体で i 番目の質点 P_i (質量 m_i) が含まれる (上から見た) 断面を示す。重心 G を通る固定軸 (z_0 軸) と P_i の距離 $\overline{OP_i}$ を R_i' (ダッシュがついていることに注意) とすると、 z_0 軸の周りの慣性モーメント I_G は、全ての i について和を取り、

$$I_G = \sum_i m_i R_i'^2 \tag{8-4-2}$$

である。ところで、図の三角形に余弦定理を適用すると、

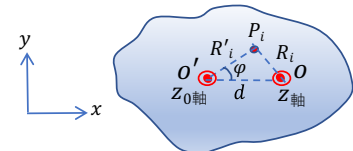
$$R_i^2 = R_i'^2 + d^2 - 2dR_i' \cos \varphi_i = R_i'^2 + d^2 - 2dx_i' \tag{8-4-3}$$

となる。ただし、 R_i は z 軸と P_i の距離 $\overline{OP_i}$ 、 φ_i は $\overline{OP_i}$ と $\overline{OO'}$ のなす角度、 x_i' は $\overline{OP_i}$ の $\overline{OO'}$ (x 軸方向) への射影である²。 z 軸の周りの慣性モーメント I は

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (R_i'^2 + d^2 - 2dx_i') = \sum_i m_i R_i'^2 + (\sum_i m_i) d^2 - 2d \sum_i m_i x_i' = I_G + Md^2 \tag{8-4-4}$$

ここで、重心から見た相対座標系で成り立つ式 $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0$ の x 成分 $\sum_i m_i x_i' = 0$ を使った。

$$\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0 \text{ が成り立つ理由: } \sum_i m_i \mathbf{r}_i' = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - M(\sum_i m_i \mathbf{r}_i / M) = 0 \right)$$



¹ 端を持って回す方が回しづらい。具体的な計算は後で行う。

² 点 P_i の「重心から見た相対座標」の x 成分に等しい。

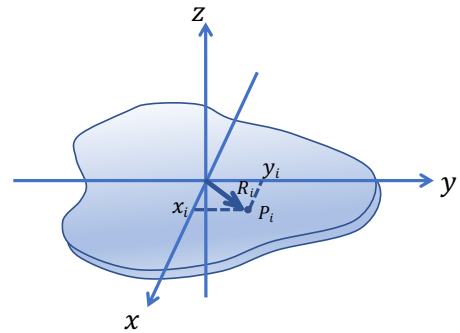
8.4.2 垂直軸の定理

右図のような薄い板状の剛体があったとする（板の表面に x 軸、 y 軸を、面に垂直に z 軸を設定）。

この時、 x 軸の周りの慣性モーメント I_x 、 y 軸の周りの慣性モーメント I_y 、 z 軸の周りの慣性モーメント I_z の間には、

$$I_x + I_y = I_z \quad (8-4-5)$$

の関係がある。これを「垂直軸の定理」という。



(証明) 板を構成する質点 P_i (質量 m_i) の (二次元の) 位置ベクトルを \mathbf{r}_i ($|\mathbf{r}_i| = R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$) とすると z 軸の周りの慣性モーメントは

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x \quad (8-4-6)$$

ここで、 $I_x = \sum_i m_i y_i^2$, $I_y = \sum_i m_i x_i^2$ であることに注意 (図を見よ)。

8.4.3 慣性モーメントの計算例

(1) 棒 (長さ l の質量 M)

図のような線密度 ρ の棒状の剛体 AB を考える。

まず、重心 G の周りの慣性モーメント I_G を求める。

図の dx の部分の重心 G の周りの慣性モーメントは質量が ρdx であるから、 $dI = (\rho dx)x^2$ によって、棒全体では、

$$I_G = \int_{-l/2}^{l/2} dI = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} M l^2 \quad (8-4-7)$$

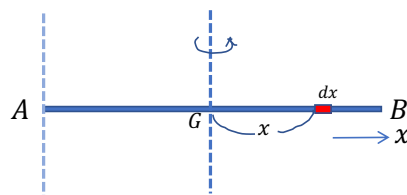
ここで、 $M = \rho l$ であることを使った。

次に、同じ棒で A 点の周りの慣性モーメント I_A は

$$I_A = \int_0^l dI = \rho \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} M l^2 \quad (8-4-8)$$

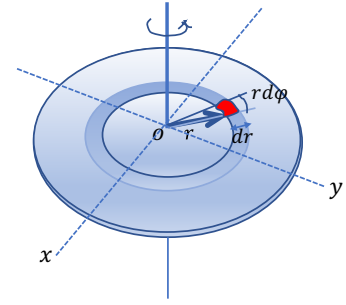
I_A は平行軸の定理(8-4-1)を使って、 $I_A = I_G + M(l/2)^2 = (1/12)Ml^2 + (1/4)Ml^2 = (1/3)Ml^2$ としても求めることができる。

こうして、同じ質量の剛体でも、どの軸の周りに回すかによって慣性モーメントは大きく異なることがわかる。今の場合は、 $I_A = 4I_G$ となり、重心の周りを回すより棒の端を持って回す方が回しづらいことを意味する。



(2) 円板 (半径 R 、質量 M)

図のような面密度 σ ($M = (\pi R^2)\sigma$) の一様な円板を考える。
 最初に、円板に垂直で o 点 (重心) を通る固定軸 (z 軸) の周りの慣性モーメント I_G を求める。図で示された幅が dr で円周部分が $r d\varphi$ の円環の一部の面積は $r d\varphi dr$ 、質量は $\sigma r dr d\varphi$ であるから、半径 r で幅が dr の円環による慣性モーメント dI_G は、



$$dI_G = \int_0^{2\pi} r^2 (\sigma r dr d\varphi) = \sigma r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \sigma r^3 dr \quad (8-4-9)'$$

なので、円板全体の慣性モーメント I_G は、

$$I_G = \int_0^R dI_G = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \quad (8-4-9)$$

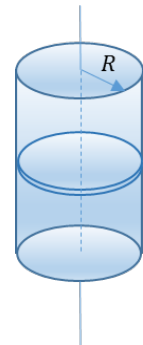
となる。ここで、 $M = (\pi R^2)\sigma$ であることを使った。

次に、同じ円板で x 軸の周りの慣性モーメント I_x 、 y 軸の周りの慣性モーメント I_y を求める。垂直軸の定理より、 $I_x + I_y = I_z$ 。ここで、 $I_z = I_G$ 、対称性より $I_x = I_y$ であることを使うと、 $2I_x = I_G$ なので、

$$I_x = I_y = \frac{I_G}{2} = \frac{1}{4} MR^2 \quad (8-4-10) \quad \text{となる。}$$

(3) 円柱 (断面の円の半径 R 、質量 M)

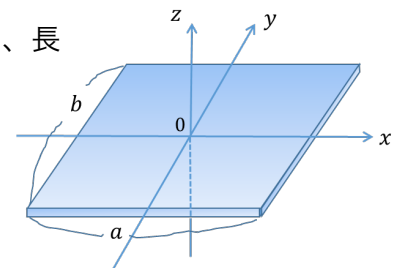
図のような円柱の軸の周りの慣性モーメントは、円柱を半径 R 、質量 m_i の薄い円板の積み重ね ($\sum m_i = M$) だと考えて良いので、式(8-4-9)より、



$$I_G = \sum_i (m_i/2)R^2 \rightarrow \frac{1}{2} MR^2 \quad (8-4-11)$$

(4) 長方形の板 (長さ a 、幅 b 、質量 M)

x 軸の周りの慣性モーメント I_x は、板が y 軸に平行で質量 m_i 、長さ b の細い棒が並んでできている ($\sum m_i = M$) と考えて得られる。式(8-4-7)を使い、



$$I_x = \sum_i \frac{1}{12} m_i b^2 \rightarrow \frac{1}{12} M b^2 \quad (8-4-12)$$

となる。同様にして、 y 軸の周りの慣性モーメント I_y は、板が x 軸に平行で質量 m'_i 、長さ a の細い棒が並んでできている ($\sum m'_i = M$) と考えて、式(8-4-7)より、

$$I_y = \sum_i \frac{1}{12} m'_i a^2 \rightarrow \frac{1}{12} M a^2 \quad (8-4-13)$$

重心を通り、板に垂直な z 軸の周りの慣性モーメント I_z は、垂直軸の定理より、

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \quad (8-4-14) \quad \text{となる。}$$

(5) 円筒 (断面の円の半径 R 、質量 M)

図のような中心がくり抜かれた筒 (円筒とよぶことにする) の中心軸の周りの慣性モーメントは、円筒を半径 R 、質量 m_i の幅の薄い「円環」の積み重ね ($\sum m_i = M$) だと考えて得られる。円環の慣性モーメントは円板の慣性モーメントを求める過程で得られた式(8-4-9)を変形した $dI_G =$

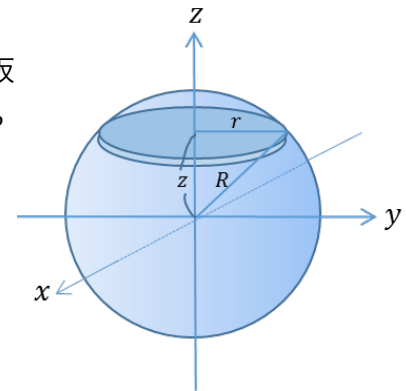


$[(2\pi r)dr]\sigma \cdot r^2 = m_i r^2$ より、円筒全体では、

$$I_G = \sum_i m_i R^2 \rightarrow MR^2 \quad (8-4-15)$$

(6) 球 (半径 R 、質量 M)

球の中心軸の周りの慣性モーメントは半径の異なる薄い円板の積み重ねと考えると求めることができる。図のように球の中心から高さ z にある薄い円板の半径は $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ なので、この円板の慣性モーメントは式(8-4-9)を使い、



$$dI(z) = \frac{1}{2}[\rho(\pi r^2)dz]r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz \quad (8-4-16)$$

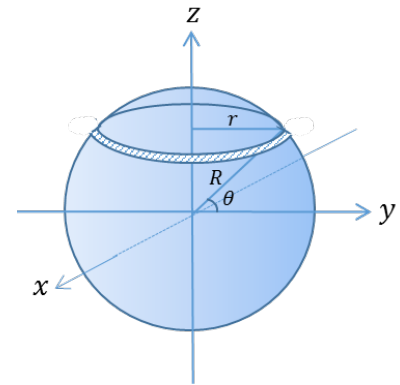
ただし、厚さを dz 、密度を ρ とした (球全体の質量は $\frac{4\pi R^3}{3}\rho = M$) .

式(8-4-16)を $-R$ から $+R$ まで積分することにより、

$$I_G = \int_{-R}^{+R} dI(z) = 2 \int_0^R \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{2}{5}MR^2 \quad (8-4-17)$$

(7) 球殻 (半径 R 、質量 M) (表面しかなく、中空)

図のように半径 $r (= R \cos \theta)$ の薄い円環 (質量 dm) の中心軸の周りの慣性モーメントは $dI(\theta) = r^2 dm = (R \cos \theta)^2 dm$ となる。ここで、面密度を σ (球殻全体の質量は $4\pi R^2 \sigma = M$) と置くと、 $dm = \sigma(2\pi r)(Rd\theta) = 2\pi R^2 \sigma \cos \theta d\theta = (M/2)\cos \theta d\theta$ となる。よって、



$$dI(\theta) = \frac{M}{2}R^2 \cos^3 \theta d\theta \quad (8-4-18)$$

球殻全体では式(8-4-18)を $-(\pi/2)$ から $+(\pi/2)$ まで積分することにより、

$$I_G = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dI(\theta) = 2 \frac{M}{2}R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{3}MR^2 \quad (8-4-19)$$

(8) 断面が半径 R の円になっている同じ質量 (M) の剛体の慣性モーメントの比較

慣性モーメントの大きいものから小さいものに順に並べると、

$$\underline{\text{円筒 } I_G = MR^2 > \text{球殻 } I_G = \frac{2}{3}MR^2 > \text{円柱 } I_G = \frac{1}{2}MR^2 > \text{球 } I_G = \frac{2}{5}MR^2}$$

となる。質量がより外側に分布している剛体の慣性モーメントが大きいことがわかる。

8.5 剛体の力学的エネルギー保存則

固定軸の周りを回転しながら一様な重力下で運動している剛体の「力学的エネルギー保存則」は以下のように書くことができる。

$$E = \left[\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right] + Mgh = \text{一定} \quad (8-5-1)$$

(「重心の運動エネルギー」 + 「回転のエネルギー」 + 「重力下でのポテンシャルエネルギー」 = 一定)

ここで、 M は剛体の質量、 I は固定軸の周りの慣性モーメント、 ω は回転の角速度、 g は重力加速度、 h は基準となる水平面からの重心の高さである。最初の二つの項の和は剛体の運動エネルギーを表している (8-5-9節参照)

簡単のため、剛体は重心を通りz軸に平行な固定軸の周りの回転をしているとする。この時の慣性モーメントを I として以下に式(8-5-1)が成り立つことを示す。

8-5-1 重力によるポテンシャルエネルギー U

剛体を構成している i 番目の質点の質量を m_i 、位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ とすると、その質点の重力によるポテンシャルエネルギーは $m_i g z_i$ なので、剛体全体では

$$U = \sum_i m_i g z_i = \left(\sum_i m_i z_i \right) g \quad (8-5-2)$$

となる。ここで、重心の位置ベクトル \mathbf{r}_G のz成分を h とおくと、

$$(\mathbf{r}_G)_z = h = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i)_z / M = \left(\sum_i m_i z_i \right) / M \quad (8-5-3)$$

なので、式(8-5-2)は $U = Mgh$ (8-5-4)

となる。剛体は質点間の距離が不変なので、質点間のポテンシャルは考えなくて良い。よって、剛体のポテンシャルエネルギーは外力 (今は重力) によるものだけになる。結局、重心に全質量が集まった点があるとして、それが基準点からの高さで決まるポテンシャルを持っているとすれば良い。

8-5-2 運動エネルギー T

7-3-3節では、質点系の運動エネルギー T が重心の運動エネルギー T_G と重心の周りの相対運動の運動エネルギー T' に分解できることを見た。式 (7-3-3) を再掲すると、

$$T = T_G + T' = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i{}^2 \quad (8-5-5)$$

ここで、剛体中の質点 i と重心を通る固定軸との距離を R_i とすると、

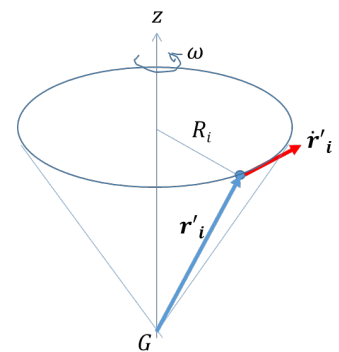
剛体は重心を通る固定軸の周りを回転をしているので、図より $|\dot{\mathbf{r}}'_i| = R_i \omega$ となる。よって、式(8-

$$5-5) \text{の最右辺の第2項は } T' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i{}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8-5-6)$$

となる。こうして、運動エネルギーは、重心の運動エネルギーと回転のエネルギーの和、

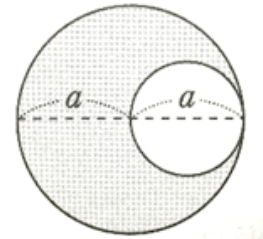
$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8-5-7)$$

となる。結局、剛体の力学的エネルギーはポテンシャルエネルギー、式(8-5-4)、と重心の運動エネルギー + 回転のエネルギー、式(8-5-7)、からなり、全体は保存する (式(8-5-1)が成立)。

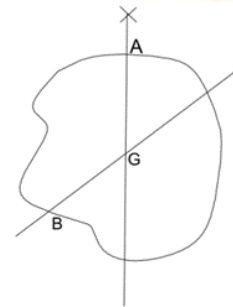


演習12

1. 右図のような形の薄い剛体の重心位置を求めよ。

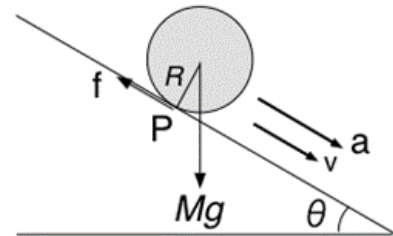


2. 任意の形をした薄い剛体がある。今、右図のように点Aに糸をつけて吊り下げた。
 (a)剛体が静止したとき、糸を下方に伸ばした線上に重心がある事を示せ。
 (b)A点と異なる点、B点においても同様の事をすれば、二つの線の交点に重心がある。
 この理由を述べよ。



3. 図のように傾き θ の斜面を、すべらずに転がり落ちる半径 R 、質量 M の円柱がある。このとき、重心の加速度 a を求めたい。

この円柱の運動を重心の運動と重心を通る固定軸の周りの回転に分離して考える。



- (1) 斜面に沿って座標軸を取った場合の重心の運動方程式を書け。ただし、摩擦力を f 、重力加速度を g とする。
- (2) 重心を通る固定軸の周りの外力のモーメント N_G を求めよ。
- (3) 円柱の重心を通る固定軸の周りの慣性モーメントを I_G として、回転運動の方程式をたてよ。回転の角速度は ω とする。
- (4) (3)の回転の方程式を f について解き、(1)の重心の運動方程式に代入し f を

消去せよ。さらに滑らないで転がる条件 $v = R\omega$ (v は速度)、を使って、 $a = \frac{g \sin \theta}{1 + I_G/(MR^2)}$ となることを示せ。

(5) 円柱だけでなく、断面が円で半径 R 、質量 M の4つの剛体（円筒、球殻、円柱、球）を同時に同じ高さから滑らずに転がした。それぞれの a を求め、斜面の下に到達する剛体の順序を述べよ。

4. 問3では重心を通る固定軸の周りの回転と考えたが、これと異なった方法で重心の加速度 a を求めたい。すなわち、任意の瞬間では、この運動は図のP点を通る軸（円柱が斜面と接する部分）のまわりの回転とみなせるので、その回転運動から考えてみよう。以下の問いに答えよ。（注：このやり方では、摩擦力 f を、あらわに考えなくてもよくなる！）

- (1) この物体の重心を通る固定軸のまわりの慣性モーメントを I_G としたとき、Pを通る軸のまわりの慣性モーメント I_P を平行軸の定理を使い求めよ。
- (2) P点を通る軸のまわりの各瞬間の力のモーメント N_P を求めよ。
- (3) 回転の運動方程式 $I_P \frac{d\omega}{dt} = N_P$ より加速度 a を求め、問3でもとめた値と同じになることを確かめよ。（すべらないで転がる条件 $v = R\omega$ に注意）

5. 問3をエネルギー保存則を使って解く。

- (1) ある瞬間の重心の高さを h とする。重心のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを書け (v, M, g, h を使う)
- (2) 重心のまわりの回転エネルギーを I_G, v, R を使って書きなさい。
- (3) $\frac{dh}{dt} = -v \sin \theta$ であることを示せ。
- (4) 全力学的エネルギー (E) を書き、その時間微分がゼロ（エネルギー保存則が成り立つ）であることより、前問と同じ加速度 a が求まることを示せ。