

8 剛体の力学 I

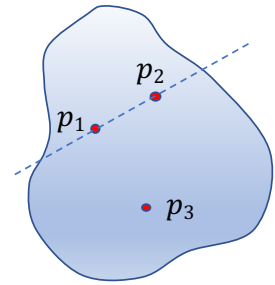
この章では、大きさを持つ実際の物体に近いモデルとして、剛体を扱う。剛体はたくさんの質点の集まり（質点系）ではあるが、「質点間の距離が固定されていて変形しない」ような物体である。このため、一般の質点系に比べて、その位置を決める方程式の数は6つに制限される。その中でも、より取り扱いが簡単である「固定軸の周りの剛体の運動」を中心に述べる。また、コマの運動についても触れる。

8.1 剛体の自由度と一般的な考察

剛体(rigid body)とは有限の大きさを持つ物体（質点系）で、変形の無視できる（理想的に固い）物体である。すなわち、剛体を構成している質点間の距離は固定されている、とする。

剛体の位置を決めるのには何個の独立な変数が必要であろうか。この変数の数の事を「自由度」と言う。たとえば、束縛のない1個の質点の場合は自由度は x, y, z の3であり、 n 個の質点では $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ の $3n$ となる。剛体が n 個の質点からできているなら、剛体の自由度も $3n$ のように思うが、質点間の距離が固定されている事を考えると、非常に小さな数に減る。

右図を見ながら考えてみよう。任意の点 p_1 に加えて p_2 を決めても、剛体は $\overline{p_1 p_2}$ の周りに回転できるので、剛体の位置は確定しない。しかし、もう一点 p_3 を追加すると剛体は固定され動けなくなる。よって p_1, p_2, p_3 の任意の3点が必要となるだろう。すなわち、 $3 \times 3 = 9$ 個の変数ですみそうである。だが、剛体である条件から、 $\overline{p_1 p_2}, \overline{p_2 p_3}, \overline{p_3 p_1}$ は一定であるので、独立な変数はもっと減り¹、 $9 - 3 = 6$ となる。こうして、剛体の自由度は6である。別の言い方をすれば、剛体の運動は6つの運動方程式で決まることになる。 n 個の質点系では一般に自由度の数 $3n$ 個の連立微分方程式で運動が決まるが、剛体の場合には、その運動は6つの運動方程式で決まることになる。



この6つの方程式をどう選べば良いであろうか。前章の議論を考えると、そのうちの3つは「重心に対する方程式」を採用し、残りの3つは「回転の運動方程式」を選べば良いだろう²。

$$\text{(重心の運動方程式)} \quad M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \left(= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{ex} \right) \quad (8-1-1)$$

$$\text{(回転の運動方程式)} \quad \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = \mathbf{N}_{tot}^{ex} \left(= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex}) \right) \quad (8-1-2)$$

式(8-1-2)において、角運動量や力のモーメントは原点の周りについて書いてあるが、必ずしもその必要はなく、問題に応じて任意の点を選んで計算すれば良い。たとえば、もし重心の周りで考えると、重力による力のモーメントは消える（ゼロになる）事はすぐわかる³。

¹ p_1 - p_2 間の長さを ℓ_{12} とすると、 $(\ell_{12})^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ となるが、この長さは固定されて変化しないので、どれかの変数一つは他の変数で表せることになり、変数は一つ減る。

² 式(8-1-1)(8-1-2)の各成分が3つである事を考えると合計6つになる

³ 重力の作用点は重心になるので、この場合、重心から作用点までの腕の長さはゼロになる。

8.2 剛体のつり合い（静止している条件）

剛体が静止しているためには、その重心が静止するだけではだめで、任意の点の周りを回転してはいけない条件が必要となる。よって、式(8-1-1)(8-1-2)の運動方程式より、

$$\text{(重心が静止する条件)} \quad \mathbf{F}_{tot}^{ex} = 0 \quad (8-2-1)$$

$$\text{(任意の点の周りに回転しない条件)} \quad \mathbf{N}_{tot}^{ex} = 0 \quad (8-2-2)$$

が剛体のつり合いの条件となる。

<例題> 質量 m 、長さ l のはしごが、図のように荒い水平な床（静止摩擦係数 μ ）と滑らかな壁の間にかかっている、質量 M の人間がはしごの下端より x の距離のところにいる。はしごが滑って落ちないための x の範囲を求めよ。ただし、滑らない条件は $f \leq \mu R$ で与えられる（ f は床での摩擦力、 R は床の垂直抗力）。また、はしごと床との角度は θ 、重力加速度は g とする。

解答例

(1) 重心が静止する条件 $\mathbf{F}_{tot}^{ex} = 0$

外力は床からの垂直抗力 \mathbf{R} 、壁からの垂直抗力 \mathbf{R}' 、摩擦力 \mathbf{f} 、そして、重力 $M\mathbf{g}$ 、 $m\mathbf{g}$ である。それらの大きさは、 R 、 R' 、 f 、 Mg 、 mg と書くことにする。水平方向と垂直方向の成分に分けて $\mathbf{F}_{tot}^{ex} = 0$ を書き出すと、

$$\text{(水平方向)} \quad R' - f = 0 \quad (8-2-3)$$

$$\text{(垂直方向)} \quad R - Mg - mg = 0 \quad (8-2-4)$$

となる。

(2) P点（はしごが床に接している点）の周りに回転しない条件

P点の周りの回転を考える。P点の周りの力のモーメントの総和がゼロ $\mathbf{N}_P^{ex} = 0$ であれば良い。P点の周りの力のモーメントは以下の5つある。

・人間の力のモーメント \mathbf{N}_M

P点から「人間の位置」まで引いた位置ベクトルを \mathbf{r}_M とすると

$$\mathbf{N}_M = \mathbf{r}_M \times M\mathbf{g}$$

$$|\mathbf{N}_M| = |\mathbf{r}_M| |M\mathbf{g}| \sin(\theta + \pi/2) = Mg x \cos \theta. \text{ 向きは 紙面垂直で手前方向}$$

・はしごの力のモーメント \mathbf{N}_m

P点から「はしごの重心」の位置まで引いた位置ベクトルを \mathbf{r}_m とすると

$$\mathbf{N}_m = \mathbf{r}_m \times m\mathbf{g}$$

$$|\mathbf{N}_m| = |\mathbf{r}_m| |m\mathbf{g}| \sin(\theta + \pi/2) = (1/2)mg \cos \theta. \text{ 向きは 紙面垂直で手前方向}$$

・壁からの抗力のモーメント $\mathbf{N}_{R'}$

P点から「はしごの壁側の端」の位置まで引いた位置ベクトルを \mathbf{r}_l とすると $\mathbf{N}_{R'} = \mathbf{r}_l \times m\mathbf{R}'$

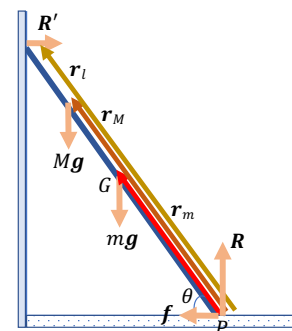
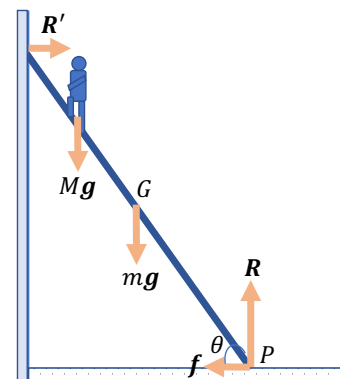
$$|\mathbf{N}_{R'}| = |\mathbf{r}_l| |\mathbf{R}'| \sin(\pi - \theta) = lR' \sin \theta. \text{ 向きは 紙面垂直で奥側方向}$$

・床からの抗力のモーメント \mathbf{N}_R 床からの抗力はP点に働くので \mathbf{N}_R はゼロになる。

・摩擦力による力のモーメント \mathbf{N}_f 摩擦力もP点に働くので \mathbf{N}_f はゼロになる。

よって、P点の周りに回転しない条件は、紙面に垂直手前方向をz軸の正の向き (\mathbf{e}_z) ととると、

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_P^{ex} &= \mathbf{N}_M + \mathbf{N}_m + \mathbf{N}_{R'} + \mathbf{N}_R + \mathbf{N}_f \\ &= Mg x \cos \theta \mathbf{e}_z + (1/2)mg l \cos \theta \mathbf{e}_z + R' l \sin \theta (-\mathbf{e}_z) + 0 + 0 \\ &= (Mg x \cos \theta + (1/2)mg l \cos \theta - R' l \sin \theta) \mathbf{e}_z = 0 \end{aligned} \quad (8-2-5)$$



$$\text{式(8-2-3)より、} R' = f. \tag{8-2-6}$$

$$\text{式(8-2-4)より、} R = (M + m)g \tag{8-2-7}$$

$$\text{式(8-2-5)より、} Mgx \cos \theta + (1/2)mgl \cos \theta = R'l \sin \theta \tag{8-2-8}$$

$$\text{式(8-2-8)と(8-2-6)より、} R' = \frac{1}{l \sin \theta} [Mgx \cos \theta + (1/2)mgl \cos \theta] = \frac{g}{l \tan \theta} [Mx + (1/2)ml] = f$$

$$\text{すべらない条件 } f \leq \mu R \text{ と式(8-2-7)を使って、} \frac{g}{l \tan \theta} [Mx + (1/2)ml] \leq \mu(M + m)g .$$

x について解くと、

$$x \leq \left[\frac{\mu l}{M} (M + m) \tan \theta - \frac{m}{2M} l \right] \tag{8-2-9}$$

8.3 固定軸を持つ剛体の運動

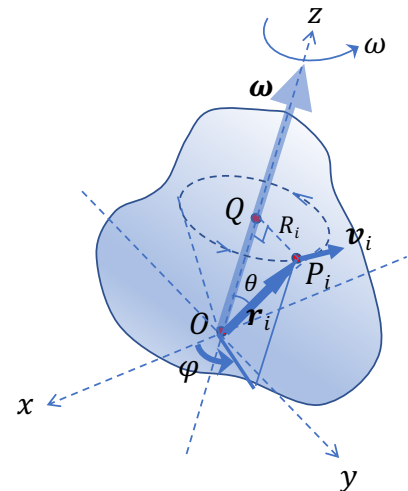
剛体の力学で最も単純なのは固定軸の周りに回転する場合である。この節では、「固定軸の周りの回転の運動方程式」を求め、回転の慣性を表す量として「慣性モーメント」を導入する。

8.3.1 固定軸の周りの回転の運動方程式

右図のOQ軸が回転軸（固定軸）だとし、それをz軸にとることにする。この場合、並進運動は無く回転もz軸の周りのみなので剛体の位置を決める変数は剛体中の任意の点のz軸の周りの回転角度 φ のみである。

したがって、自由度は1となるので必要な方程式の数は1つだけである。そこで、回転の運動方程式(8-1-2)のうちz成分のみを考える事にする。すなわち、

$$\frac{d(\mathbf{L}_{tot})_z}{dt} = (\mathbf{N}_{tot}^{ex})_z \tag{8-3-1}$$



この式は、 φ を変数とする「**固定軸の周りの剛体の回転に関する運動方程式**」として次のように書き表すことができる。

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = N_z \tag{8-3-2}$$

あるいは、剛体の固定軸の周りの角速度 $\omega = \dot{\varphi}$ を使って、

$$I \frac{d\omega}{dt} = N_z \tag{8-3-3}$$

と書ける。ここで、 $(\mathbf{N}_{tot}^{ex})_z$ を簡単のため N_z と書いた。また、 I は次の式(8-3-4)のように定義され、「固定軸の周りの⁴慣性モーメント (moment of inertia)」と呼ばれる。

⁴ 今の場合は「z軸の周り」の慣性モーメント

$$I \equiv \sum_i (m_i R_i^2) \tag{8-3-4}$$

この式の R_i は図に示したように固定軸(z軸)から任意の点 P_i までの距離である。したがって、固定軸を決めれば剛体の形や大きさから、その剛体固有の量として決まる⁵。

式(8-3-2)の証明は後回しにして、この方程式の物理的な意味を見てみよう。もし、外力が無ければ(もっと正確には外力のモーメントの総和の固定軸方向の成分(z成分) N_z がゼロであるなら)、式(8-3-3)より、その剛体の角速度は一定(ゼロも含む)となる。すなわち、 $N_z = 0$ ならば、剛体は固定軸の周りをいつまでも一定の角速度で回り続けていることを意味する。これは「回転の慣性」と言える。この回転状態を変化させる量が N_z である。 N_z がゼロでない場合、固定軸の周りの回転の角速度は時間変化する。すなわち、 N_z は回転の状態の変化の原因であり、回転の加速度=角加速度(これを $\alpha \equiv \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ と定義する)を生じさせる。式(8-3-3)は、角加速度を使って $\alpha = N_z/I$ と書けるので慣性モーメントは回転の加速のしづらさを表す量であることがわかる。

これらの事を直線運動の方程式と比較してみると、回転運動と直線運動との間に対応関係がある事がわかる。

(1次元直線運動)		(固定軸の周りの回転運動)	
質量	m	慣性モーメント	I
位置(変位)	x	回転角	φ
速度	$v = \dot{x}$	角速度	$\omega = \dot{\varphi}$
運動量	$p = mv$	角運動量 ⁶	$L = I\omega$
加速度	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	角加速度	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
加速度の原因	F	回転の加速度の原因	N_z
運動方程式		回転の運動方程式	
	$ma = m\dot{v} = m\ddot{x} = F$		$I\alpha = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi} = N_z$
	$\frac{dp}{dt} = F$		$\frac{dL}{dt} = N_z$

8.3.2 角速度ベクトル(証明準備)

式(8-3-2)を証明する準備として「角速度ベクトル」 $\boldsymbol{\omega}$ を定義する。ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の大きさは角速度 ω (rad/s)で、その向きは、その物体と同じ向きに回転する右ねじの進む方向と定義する。前節の図(p. 64)には、剛体が角速度 ω でz軸の周りを反時計まわりに回転している時の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を示した。この場合は、 $\boldsymbol{\omega}$ は回転軸(z軸)の方向を向いている。

固定軸上にとった原点 O から剛体中の任意の点 P_i に引いた位置ベクトルを \mathbf{r}_i とすると、その点の速度 \mathbf{v}_i は、

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \tag{8-3-5}$$

と書ける事を示せる。

⁵ 具体的な計算方法は後の節(8-4節)で述べる

⁶ 式(8-3-10)参照

(式(8-3-5)の証明) $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ の向きは、ベクトル積の定義から $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{r}_i の作る面に垂直で $\boldsymbol{\omega}$ から \mathbf{r}_i の方向に右ねじを回した方向となる。すなわち、前節の図からわかるように、 \mathbf{r}_i の先端が回転して描く円の接線方向となるので、 \mathbf{v}_i と同じ方向となる。また、その大きさは $|\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}_i| \sin \theta = \omega (r_i \sin \theta) = R_i \omega = |\mathbf{v}_i|$ となる。ここで、 R_i は図に示したように、固定軸と P_i との距離である。よって、式(8-3-5)が成り立つ。なお、剛体中の全ての点は同じ角速度 ω で回転している事に注意しよう⁷。

8.3.3 回転の運動方程式(8-3-2)の証明

準備ができたので、まず、全角運動量 \mathbf{L}_{tot} を求める。8.3.1節の図より、剛体中の任意の点 P_i での(原点の周りの)角運動量 \mathbf{L}_i は $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ なので、

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) \quad (8-3-6)$$

となる。式(8-3-6)の最右辺ではベクトルの3重積が出てきた。3重積の公式⁸、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (8-3-7)$$

を使うと、

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_i m_i [(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i] \quad (8-3-8)$$

となる。 $\boldsymbol{\omega}$ はz軸方向を向いているので、 $\boldsymbol{\omega}$ のz成分以外はゼロであるから、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ とすると、 $(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = z_i \omega$ となり、 \mathbf{L}_{tot} のz成分は、

$$(\mathbf{L}_{tot})_z = \sum_i m_i (|\mathbf{r}_i|^2 \omega - z_i \omega z_i) = \sum_i m_i (|\mathbf{r}_i|^2 - z_i^2) \omega \quad (8-3-9)$$

8.3.3節の図より、 $|\mathbf{r}_i|^2 - z_i^2 = R_i^2$ であるから、

$$(\mathbf{L}_{tot})_z = \sum_i (m_i R_i^2) \omega = I \omega \quad (8-3-10)$$

と書ける。

(注意) (8-3-8)式の右辺の和の中の第2項があるので、一般的には、必ずしも \mathbf{L}_{tot} は $\boldsymbol{\omega}$ に平行にはならない事がわかる。ただし、「軸対称の剛体の場合で、回転軸がその対称軸にある場合」は、個々の \mathbf{L}_i はz方向を向いていなくとも、全ての質点の \mathbf{L}_i をベクトル的に足し合わせると、全体として、z成分以外はキャンセルし、全体の \mathbf{L}_{tot} はz方向を向く(図を書いて確かめよ)。この場合は、 \mathbf{L}_{tot} と $\boldsymbol{\omega}$ は平行になる。

一方、外力による力のモーメントの総和のz成分(固定軸方向の成分) $(\mathbf{N}_{tot}^{ex})_z$ は、

$$(\mathbf{N}_{tot}^{ex})_z = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{N}_i^{ex})_z = \sum_i (x_i (\mathbf{N}_i^{ex})_y - y_i (\mathbf{N}_i^{ex})_x) \quad (8-3-11)$$

となる。 $(\mathbf{N}_{tot}^{ex})_z$ を簡単のため N_z と書くなら、結局、式(8-3-1)は $I \frac{d\omega}{dt} = N_z$ となる⁹。 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ であること

を使うと、上の式は、 $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z$ と書ける。こうして、 φ を変数とする回転の方程式、すなわち、「剛体の固定軸の周りの回転に関する運動方程式」が得られた。

⁷ なので、 ω にはiの添え字が付いていない。

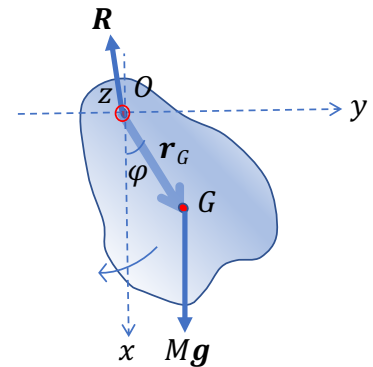
⁸ 成り立つことを示せ。

⁹ ここでは、慣性モーメント I は時間変化しない、としている

8.3.4 実体振り子 (例題)

おもりとして質点が吊るされている「単振り子¹⁰」に対して剛体が固定軸の周りに振動するような振り子を「実体振り子(physical pendulum)」と言う。

今、図のような全質量 M で固定軸 (z 軸) の周りの慣性モーメント I を持つ実体振り子がある時、その角振動数 ω と周期 T を求めてみよう。



まず、O点を固定軸とする回転の運動方程式は、式 (8-3-2)

$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z$ となる。外力は、重力 Mg と抗力 R であるが、O点の周りの力のモーメント N_{tot}^{ex} を考えると、抗力による力のモーメント N_R はゼロになるので、重力による力のモーメント N_G のみ考えれば良い。すなわち、

$$N_{tot}^{ex} = N_R + N_G = 0 + \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = \sum_i (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g} = M \mathbf{r}_G \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_G \times M \mathbf{g} \quad (8-3-12)$$

となる。ここで、重心の定義 $\mathbf{r}_G = (\sum m_i \mathbf{r}_i) / M$ を使った。 $|\mathbf{r}_G| = \overline{OG} = l$ とすると、 $|N_{tot}^{ex}| = Mgl \sin \varphi$ で、その向きは z 軸負の方向 (紙面に垂直で奥の方向 \otimes) となる (まとめて書けば、 $N_{tot}^{ex} = Mgl \sin \varphi (-\mathbf{e}_z)$) .したがって、その z 成分は、

$$N_z = -Mgl \sin \varphi \quad (8-3-13)$$

となる。これを式(8-3-2)に代入すると、固定軸の周りの剛体の方程式は

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z = -Mgl \sin \varphi \quad (8-3-14)$$

と書ける。

今、微小角度 $\varphi \ll 1$ のみ考えると、 $\sin \varphi \sim \varphi$ なので、上の式は、

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgl}{I} \varphi \quad (8-3-15)$$

となり、単振動の式と全く同じになる。よって、これはすぐに解けて、一般解は、

$$\varphi(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (8-3-16)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} \quad (8-3-17)$$

となる。ここで、 A, B は初期条件で決まる係数。

(参考) 重さの無視できる長さ l の糸に質量 M の質点が吊るされている単振り子の場合、その慣性モーメントは $I = Ml^2$

となるので、式(8-3-17)に代入すると、単振り子の場合の $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ や $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ と一致する。

¹⁰ 演習8の問題5 参照