

力学ICD講義ノート¹

0. 講義中で使用するベクトルとギリシア文字の記法

アルファベットのの上に矢印を付けてベクトルであることを表記する方法も良く使われるが、本講義の板書などでは下図（左）のような書き方を採用する（図は、齊藤の手書き）。特に大文字のVとZに注意。このノート中では太文字の活字で表す。参考のため、ギリシア文字の一覧表も下図（右）に示す（Feynman物理学より引用²）

We like the following way :

A B C D E F G
H I J K L M N
O P Q R S T U
V W X Y Z

Small letters are harder:

a b c d e f g
h i j k l m n
o p q r s t u
v w x y z

Lower case Greek letters and commonly used capitals

α alpha	ι iota	ρ rho
β beta	κ kappa	σ Σ sigma
γ Γ gamma	λ Λ lambda	τ tau
δ Δ delta	μ mu	υ Υ upsilon
ϵ epsilon	ν nu	ϕ Φ phi
ζ zeta	ξ Ξ xi (ksi)	χ chi (khi)
η eta	$\omicron$ omicron	ψ Ψ psi
θ Θ theta	π Π pi	ω Ω omega

1. Newtonの運動法則(the law of motion)(復習)

これから学ぶ古典力学の基本法則は次の三つのNewtonの運動法則に集約される。

第1法則 慣性の法則

第2法則 運動方程式

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}; \quad \mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (1-1)$$

第3法則 作用・反作用の法則

この章では、以下、その内容を見ていくことにする。

¹ あくまで講義メモなので、講義を受けることが前提です。黒板に書いた図などは省略することが多い。講義の補充的な内容も書くことがある。おもわぬ間違いがあるかもしれない（他の書物でも同じことであるが）ので、それらのことを了承の上で使用する。また、演習も載せた（これは演習の時間に使用する）。ページ順にとじて講義（演習）時間には常に持参すること（または、タブレットやスマホで見れるようにしておくこと）。

² Feynman（ファインマン）はアメリカ出身の物理学者。図は有名な教科書「ファインマン物理学<1>力学」（岩波書店）より

1.1 慣性・質量・加速度・力

第1法則は「慣性の法則」とよばれる。物体は、何らかの原因なしに加速したり減速したり方向を変えたりしない。すなわち、何らかの作用が無ければ等速直線運動³する。この性質を「慣性(inertia)」と言う。

第2法則は、その作用である「力(force)」を定義しているとみなせる。運動状態が等速直線運動から変化するという事は「加速度(acceleration)が生じる」、ということであるので、(1-1)式は、その加速度 $\mathbf{a}$ が力 $\mathbf{F}$ より生じていることを示している。すなわち、

古典力学では、力とは運動の状態を変化させる作用⁴、

ということになる。また、(1-1)式は $\mathbf{a}$ が質量 m に反比例している事も示している。したがって、質量は加速のしづらさを表すので、

質量 = 物体の持つ慣性の量、

と言える。質量の単位はkg、力の単位はN（ニュートン）、加速度の単位は m/s^2 。

ここで、「質量」と「重さ」は異なる物理量であることに注意しておく。重さとは「その物体を引き寄せる重力の大きさ」のことである。なので、本来、重さの単位は力の単位であるNとなる。ただし、重力、すなわち、万有引力は質量に比例する⁵ので、重さも質量に比例することになる。そのため、日常生活では重さを質量の単位であるkgを使って表している⁶。しかし、質量はその物質に固有のものなのに対して、重さは環境（重力）で変化する。月の上に行けば地上の重さの1/6になるし、宇宙空間(無重力空間)では重さは0になる。この場合でも、質量は変化せず、物質の加速のしづらさは質量で決まる。

1.2 ベクトルの微分

第2法則を少し詳しく見るために、ここではベクトルの微分について復習しておこう。今、3次元の直交座標を考える。ある瞬間の質点の位置を示すのに位置ベクトル、

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (1-2)$$

を使う。ここで、 x, y, z はそれぞれ $\mathbf{r}$ のx成分、y成分、z成分をあらわす。質点は一般にこの空間を動きまわるので、x成分、y成分、z成分は時間的に変化する。そこで、そのことを表すのに、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (1-3)$$

と書くこともある。

³ 等速度運動といっても良い。

⁴ 素粒子論まで進むと、「運動の状態を変化させる働き」だけではなく「粒子の種類（状態）を変化させる働き」も力と呼ぶ。例えば、自然界の基本的な力の一つである「弱い力」は中性子を陽子に変える（ベータ崩壊）。

⁵ 式(2-1),(2-2)を参照

⁶ 区別するためにkg重(kgw)と書くこともある。

速度や加速度も同様にして、

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)), \quad (1-4)$$

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \quad (1-5)$$

と書ける。

速度ベクトルの各成分は各座標成分の微分で書けるから、

$$\mathbf{v}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (1-6)$$

これを、まとめて、

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (1-7)$$

と書く。

加速度も同様にして、

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad (1-8)$$

と記す。（なお、時間微分を表すのに、その物理量の記号の上にドットをつけることがある。

$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ など⁷)

速度を表す(1-7)式はベクトル $\mathbf{r}(t)$ の時間微分を示しているが、これをあらためて、次のように定義してみる。

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (1-9)$$

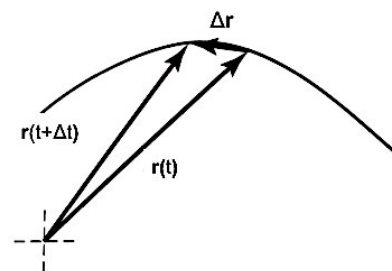
ここで、ごく短い時間での位置ベクトルの変化を、

$$\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (1-10)$$

と定義した。(1-9)式を成分に分けて書き $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取れば、x成分、y成分、z成分それぞれが $\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}$ の定義式なので、(1-6)式が再び得られる。

今度は、式(1-9)を幾何学的に見てみよう。

原点を一致させて $\mathbf{r}(t)$ と、それから少し角度や長さを変えた $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ を図示する。次に、 $\mathbf{r}(t)$ のベクトルの先端から $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ のベクトルの先端に引いたベクトルを作ると $\Delta \mathbf{r}$ が書ける。 $\Delta \mathbf{r}$ は一般には $\mathbf{r}(t)$ や $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ と異なる



⁷ Newtonの微分記法と呼ばれる。二階微分はドットを2個つける。

る方向を向いている。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ を取ると、 $\mathbf{r}(t)$ と $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ は近づいて行き、 $\Delta \mathbf{r}$ は物体の運動の軌跡 ($\mathbf{r}(t)$ の先端が描く曲線) の接線方向に近づくであろう。これをスカラー量 Δt で割っても、その向きは変わらないので、結局、速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ は運動の軌跡の接線方向を向いている事がわかる。

ここで、幾何学的な見方に慣れるため加速度運動である等速円運動について調べてみる。

その前に、念のため次のことを確認しておこう。

二つのベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が等しい、ということは

(1) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ (大きさが等しい)

(2) $\mathbf{A}$ の向きと $\mathbf{B}$ の向きが等しい

(1-11)

の二つがなりたつ事である。

等速円運動は「等速」と名前が付いているので、加速度運動では無い?、と思う人もいるかもしれないが、それは間違いである。まず、円運動なので、その運動の軌跡は、ある一定の半径の円を描く。先ほどの事から、この運動での速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ は常に運動の軌跡である円の接線方向を向いているはずである。したがって、速度の大きさは、

「等速」であるから常に等しいが、その向きは刻々と変わる運動になる。(1-11)より、大きさが同じでも向きが変わる場合は、同じ速度ベクトルとは言えないので、等速円運動は等速度運動ではなく「加速度運動」と言わなければならない。

等速円運動の加速度ベクトルを(1-9)と同様な方法で表してみると、

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (1-12)$$

と書ける。一方、 $\Delta \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ なので、 $\Delta \mathbf{v}$ は、作図してみるとわかるが、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で円の中心方向を向く。 $\Delta \mathbf{v}$ をスカラー量 Δt で割っても、その向きは変化しないので、結局、加速度 $\mathbf{a}(t)$ は常に円の中心方向を向いている事になる。

ここで第2法則(1-1)式を適用すると、加速度の方向と力の方向は同じなので、等速円運動の場合、常に中心方向へ同じ大きさの力が働いていることになる。

1.3 第2法則 (運動方程式)

第2法則は(1-1)式より、 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ であるが、(1-8)式を使って書くと、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1-13)$$

となる。

あるいは、 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ として、(1-13)式を成分に分けると、

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = F_z \quad (1-14)$$

と書ける。(1-13)、(1-14)式は、第2法則は「微分方程式」であることを示している。もう少し正確にいうと、「2階の常微分方程式」である。微分方程式とは「未知関数の導関数を含む方程式」のことで、今の場合、未知関数は $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ である。したがって、適当な初期条件のもと、この微分方程式を解くことによって、与えられた力のもとでの運動 (位置ベクトルの時間変化) がわかることになる。

こうして、

力学の問題 = 運動方程式（微分方程式）を解く問題

と言える。力学だけではなく、物理の多くの法則は微分方程式で表される⁸。

（例題）

考えている空間で、常に $\mathbf{F} = 0$ だとして。この時の運動を調べよ。

（解答）

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d \mathbf{r}(t)}{dt} \right) = 0 \text{ なので、} \frac{d \mathbf{v}(t)}{dt} = 0$$

$\frac{d \mathbf{v}(t)}{dt} = 0$ ということは、 $\mathbf{v}$ は定数で、その大きさも方向も変わってはならないこと意味する。

すなわち、解は $\mathbf{v} = \text{一定}$ （等速度運動、または、同じことであるが等速直線運動）

ここで、重要なことを述べる。ベクトルの微分がゼロの場合、そのベクトルは「大きさ」も「向き」も変わってはいけない。（大きさが変わっていけないのはすぐにわかる。しかし、**大きさが変化しなくても方向が変わっていれば、その微分はゼロではなくなる**（加速度運動となる）。等速円運動の場合を思い出せ。）⁹

念のため、成分でも考えると、 $\frac{dv_x(t)}{dt} = 0$ 、 $\frac{dv_y(t)}{dt} = 0$ 、 $\frac{dv_z(t)}{dt} = 0$ であるから、こ

れらの解は、全ての速度の成分が定数であることを意味する。すなわち、 $\mathbf{v} = \text{一定}$ となる。

上の例題より、第2法則において、 $\mathbf{F} = 0$ の時は等速直線運動になることが示された。とすると、第1法則は不必要ではないかと思うかもしれない。慣性の法則が運動方程式の解として含まれているからである。

しかし、どんな座標系においても $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ が成り立つわけでないことに注意する必要がある。実は、第1法則は、「第2法則が成り立つための前提条件として、「慣性系」を取らなければいけない」、という事を述べていると解釈できるのである。これについて、以下に説明する。

今、ある質点が力を受けずに静止しているとしよう。当然、静止した座標系からこの質点を観測すると、静止して見えるので $m\mathbf{a} = 0$ （加速度 = 0）となり、第2法則が成り立っている。

今度は、この静止した座標系に対して一定の速度で動いている座標系からこの質点を観測したとしよう。この場合は、質点は座標系の動きと逆方向の速度で動いているのが観測される。この場合も $m\mathbf{a} = 0$ （加速度 = 0）となり、見かけの運動は異なるが、やはり第2法則が成り立っている。

⁸ 例えば、量子力学ならシュレディンガーの方程式、電磁気学ならマックスウェルの方程式、など。これらは偏微分方程式で記述される。物理法則の多くが微分方程式で表される理由の一つは、微分方程式が（力学の場合だと）可能な運動を全て詳細に記述する事なしに、それらの共通の性質のみを抽出している表記だからだと考えられる。解には積分定数が含まれるが、これを変えると解の族に含まれる無数の運動が記述できる。しかし、微分方程式の形にすると、その定数は消えて、運動の本質の記述だけが残る。演習1の5を参照。

⁹ もし、この理由がわからぬときは、これまでの議論(1.2節)を再度、吟味してみること。

一方、この静止した座標系に対して加速して動いている座標系からこの質点を観測したとしよう。この場合は、質点は座標系の動きと逆方向に加速度運動しているのが観測される。この場合は質点の加速度の観測値はゼロではないので、第2法則が成り立っているとすると、あたかも $m\mathbf{a} = \mathbf{F}'$ のような「見かけの力 $\mathbf{F}'$ 」を導入しなければいけないだろう。しかし、もともと質点は力を受けていなかった ($\mathbf{F} = 0$) のであるから、これは、第2法則が加速度系ではもはやなりたたない事を示している。

見かけの力を導入しなくて済むのは、静止しているか、一定の速度で動いている座標系のみである（このような座標系を慣性系と言う）¹⁰。この場合は慣性の法則が成り立ち、第2法則も成り立つ。結局、第1法則は不要なのではなく、運動方程式（第2法則）が成り立つための前提条件（慣性の法則が成り立つ座標系（慣性系）を取れ、という条件）が書かれている、と解釈できるわけである。

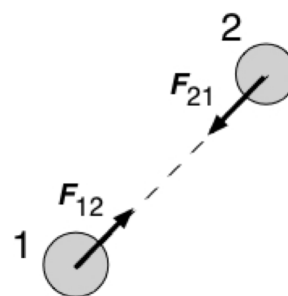
慣性系でない場合（回転座標系などの非慣性系の場合）、どのような見かけの力を考えなくてはいいか、については、14章であらためて取り扱う。

1.4 第3法則（作用・反作用の法則）

二つの物体があったとする（簡単のため両方とも質点とする）。

二つを区別するために、右図のように、番号を1、2とつける。

1の質点が2より受ける力（例えば、万有引力）を $\mathbf{F}_{12}$ と書くことにする（添字の順序に注意）。2の質点が1から受ける力を $\mathbf{F}_{21}$ と書くことにする。そのとき、これらの力は質点1と2を結ぶ直線上にあり、それらの大きさは同じで互いに逆方向を向く。すなわち、



$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (1-15)$$

これを、「作用 (action)・反作用 (reaction)の法則」という。

こうして、1) どちらが力を及ぼし、力を受けるか、という区別がない、2) 力はいつも対になって現れる、3) 二つの質点を結ぶ直線上に生じる。

このため、力は相互作用(interaction)と呼ばれることもある¹¹。

この第3法則と運動量保存則の間には関連があることを示すことができるが、これは演習1で扱う。

¹⁰（補足）静止、とか、一定の速度、とかは何を基準に取れば良いのであろうか。日常生活では、無意識に地表を基準点として考えている。例えば、地表に対して動かぬものは静止、としている。しかし、地球は太陽の周りを運動しているし、太陽も・・・と考えると、静止の基準が曖昧になってくる。Newton力学では、絶対空間なるものを考え、基準となる座標系を想定しているのである。（加えていうと、全てものに共通で流れる絶対時間も想定してる。）この辺のことは相対性理論を学ぶ際に吟味することになるので、ここでは、これ以上立ち入らない。

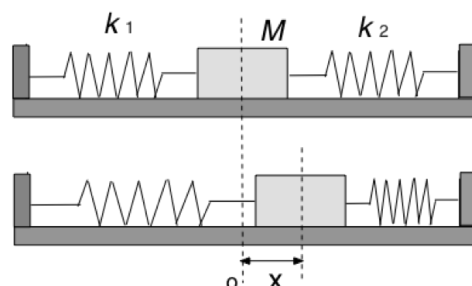
¹¹ このような法則があることは、この宇宙にたった二つしか物体がないような場合を思い浮かべてみると、証明したことにはならぬが、なんとなくわかった気になれる。宇宙には二つの物体しか無いのだから、そのとき、それらの間に働く力は二つの質点を結ぶ直線上に生じるのが自然に思える。また、その直線から何度か傾いた向きに力が生じる根拠もないだろう。また、二つしかないのであるから、片方だけ力を受けるのも不自然である。対になって現れ、その大きさは同じであるというのがもっともらしい。

演習 1

1. 質量 1 kg の物体の重さは地球上では何 N か。（地球上での重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。）また、月面上ではどうなるか。（月面上で重力は 1/6 になるとする）

2. 二つの質点がある。作用・反作用の法則で 1.4 節の図のように大きさが等しく向きが逆の力 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) が働いている。このとき、二つの質点の運動量の和は常に一定（全運動量の保存）であることを示しなさい。（それぞれの質量、速度、運動量を $m_1, m_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とする。）¹²

3. 図のように質量 M の物体の両側にはばね定数 k_1 と k_2 のばねがつけられている。ばねの質量や物体と床の摩擦などは無視できるものとする。



- (1) この系の運動方程式を書け。
- (2) 振動の周期を求めよ。

4. 地表近くでの一様な重力のもとでの落下運動は

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (1-16)$$

で表される。ここで、 g は重力加速度である。係数 C_1, C_2 の値によって、いろいろな初期条件での落下運動が記述される。逆に、この式の両辺を t で微分することにより、これらの係数を消去し、この運動に対する微分方程式を導きなさい¹³。

5. 今、一定の速度 V で動いている台車の上に乗っている人が、ボールを自分の真上に初速度 v_0 で投げ上げた。空気の抵抗などは無視できるとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 台車に乗っている人からそのボールの運動はどう見えるか。
- (2) 台車の外で静止している人がそのボールを観察したらどう見えるか。
- (3) 台車に乗っている人と、外で静止している人とで、ボールの見え方が違うが、両方でニュートンの第 2 法則が成り立っていると言えるか？¹⁴

6. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t)$ を証明せよ。¹⁵

¹² ヒント：それぞれの質点の運動方程式を書き、その和をとる。この際、作用・反作用の法則を使うと運動量保存 ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{定数}$) が導ける。ただし、質量は時間変化しないとする。

¹³ 1.3 節の脚注 8 を参照し、運動の法則が微分方程式で表される理由について考察せよ。

¹⁴ 第 2 法則（微分方程式）が成り立つ、とはどうことを言うのかを考えよ。

¹⁵ 左辺の $\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)$ を $A_x(t)B_x(t) + A_y(t)B_y(t) + A_z(t)B_z(t)$ のように成分で書いて微分してみよ。

2. 力の場（ベクトル場）

「ベクトル場」を説明するのに「万有引力の場」を例として取り上げる。今、質量が M と m の二つの質点を考える。ここでは $M \gg m$ としておく¹⁶。 M の物体を原点において、そこから m の物体までの位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とし、その大きさ（質点間の距離）を $|\mathbf{r}| = r$ とする。このとき、万有引力の大きさは、

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = G \frac{Mm}{r^2} \quad (2-1)$$

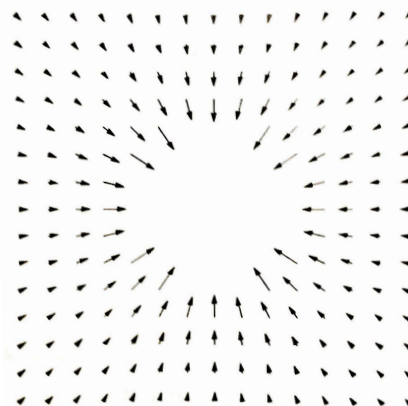
と書ける。ここで、 G は万有引力定数で、

$6.67 \times 10^{-11} \text{ (m}^3/\text{kg s}^2\text{)}$ 。原点（物体 M ）から質点 m の方向への

単位ベクトルは $\frac{\mathbf{r}}{r}$ と表される¹⁷から、 m の物体が M から受ける万有引力は、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2-2)$$

と書ける。負の符号は引力であることを表している。 $GMm = 1$ として $-\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ のみを描いたのが右上の図である。実際には3次元なので、球状にそのベクトルは分布するが、わかりづらいので、図は2次元的に表した。また、中心部分は非常にベクトルの大きさが大きくなるので省略してある。



今、中心に質量 M の質点を置いたとき、 m を置かなくとも周りの空間の性質が変化し、 m を任意の点に持ってくると、(2-2) の力を受けるようになる、と考えてみよう。このような空間を場 (field) と呼ぶ。今の場合は、中心に質量 M の質点を置いたとき、「万有引力の場」、 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ができたと考える¹⁸。 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{F}(x, y, z)$ と書いても良いが、空間の各点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に、ベクトル $\mathbf{F}$ （一般には、場所により $\mathbf{F}$ は大きさも向きも異なる）が配置することを表している。このような場は「ベクトル場」と呼ばれている¹⁹。各点のベクトルはもっと一般的に考えると、大きさや向きが時間変化する場合もあるだろう。この時は、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ あるいは $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ のように書けば良い。

(補足) この様な古典的な場の考え方は、電磁気学でも現れる。例えば、原点に負の電荷を置けば、その周りの電場は右上の図と同じ様になる。電磁場の場合、相互作用は光の速度で場の中を伝わっていく。電磁波はこの現れである。この様な相互作用（力）を「近接作用」と呼ぶ。それに対して、Newton力学での万有引力は瞬時にその作用が伝わるので「遠隔作用」と呼ばれている。しかし、一般相対性理論まで考えると、重力も光の速度で場の中を伝わる（重力波）ことが示される。

演習 2

ばね定数 k の調和振動子がある。1次元的に振動する場合、その力の場がどうなるかスケッチしなさい。また、等方的に3次元で振動（どの方向に引っ張っても中心方向に復元力が働く）する場合はどうなるか。

¹⁶ m の質点を任意の位置に持ってきて、 M が十分大きければ、中心にある M はほとんどその位置を変えない。

¹⁷ あるベクトルの方向を向く単位ベクトルは、そのベクトルをそのベクトルの大きさを割ったものとなる。

¹⁸ (2-2) 式を m で割って、単位質量あたりの場を考える場合もある。

¹⁹ 各点にスカラー値が割り振られているような場も考えられる。この時は「スカラー場」と言う。ポテンシャルの場などがそれにあたる。