# 力学ICD演習解答例
# 演習4

1. 任意の2点（A点とB点）のポテンシャルエネルギーの差の表式は次のようになることを示せ。

$$\Delta U \equiv U(B) - U(A) = -\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r} \qquad (3\text{-}3\text{-}14)$$

**（解答例）** 任意に選んだ基準点を0とする。定義より、$U(A) = -\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r}$、　$U(B) = -\int_0^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r}$

$$\Delta U \equiv U(B) - U(A) = -\int_0^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r} - \left(-\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r}\right) = -\left(\int_A^0 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r} + \int_0^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r}\right) = -\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r}$$

ここで、$-\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r} = \int_A^0 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r}$ を使った（線積分では上限と下限を入れ替えると符号が変わる）。

基準点は任意選べることと、全ての線積分の経路も任意に選べることから、上の結果は一般的に成り立つ。

結局、任意の2点（A点とB点）のポテンシャルエネルギーの差を求めるには、基準点を通る必要はなく、２点間を任意の経路で結び、その間の線積分(3-3-14)を行えば良い。

2. (1) 力の中心から基準点までの距離を$r_0$とするとき、任意の中心力$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ のポテンシャル $U(r)$ は、

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\ dr \qquad (3\text{-}3\text{-}15)$$

で求まる事を示せ。

(2) 逆３乗則に従う引力 $f(r) = -\dfrac{\alpha}{r^3}$ があったとする（ $\alpha$ は正の定数）。このときの$U(r)$ を(3-3-15)式から求めよ.（基準点を $+\infty$ に取る）

**（解答例）**

(1) 中心力なので $\mathbf{r}//(d\,\mathbf{r})$ である。よって、$\mathbf{r} \cdot d\,\mathbf{r} = |\mathbf{r}||d\,\mathbf{r}| = r\,dr$ である事を使うと、

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r} = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} d\,\mathbf{r} = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}} f(r)\frac{r}{r} dr = -\int_{r_0}^{r} f(r)\ dr$$

(2)

$$U(r) = -\int_{+\infty}^{r} f(r)\ dr = -\int_{+\infty}^{r} -\frac{\alpha}{r^3}\ dr = \alpha\int_{+\infty}^{r} \frac{dr}{r^3} = -\frac{\alpha}{2r^2}$$

3. 無限遠方を基準点として、質量１kgの物体が、以下の位置でもつ地球の重力のポテンシャルエネルギーを求めよ。
（１）地表（$R_0$点）
（２）地球の中心から$10^5$ km　（A点）
（３）$R_0$点からA点まで、質量１kgの物体を動かすのに必要な仕事
(参考)　地球の半径＝$6.37\times10^6$ m、地球の質量＝$5.98\times10^{24}$　kg、万有引力定数G＝$6.67\times10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg}$

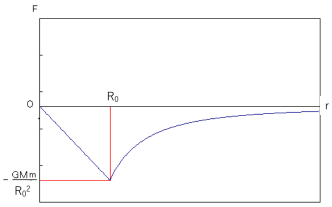
**（解答例）**

(1) $U(R_0) = -\dfrac{GMm}{R_0} = -\dfrac{6.67\times10^{-11}(\mathrm{Nm^2/kg})\times 1\mathrm{kg}\times(5.98\times10^{24}\mathrm{kg})}{6.37\times10^{6}\mathrm{m}} = -6.26\times10^{7}\mathrm{J}$

(2) $U(A) = -\dfrac{6.67\times10^{-11}(\mathrm{Nm^2/kg})\times 1\mathrm{kg}\times(5.98\times10^{24}\mathrm{kg})}{10^{8}\mathrm{m}} = -3.99\times10^{6}\mathrm{J}$

(3) $\Delta U = U(A) - U(R_0) = 5.86\times10^{7}\mathrm{J}$ なので$|\Delta W| = 5.86\times10^{7}\mathrm{J}$ （力に逆らって質点を運んだ時）

（参考）地球のように質点でなく大きさがある物体（半径$R_0$）の万有引力とポテンシャルは、**$r>R_0$ では、その物体のすべての質量が中心に集まったときの万有引力とポテンシャルになる。$r<R_0$ では rより内側の質量だけが万有引力とポテンシャルに効く。**$r<R_0$では力の絶対値は距離に比例して減少し、**中心で０となる**（右図参照）。これは、一様に帯電した中身の詰まった球の内外での電場を求める問題と同じである（中心での電場は０となる）。一様に帯電した球殻の場合、球殻内部では電場は常に０となる。




　これらを示すには「極座標での積分」か、ベクトル解析で出てくる「ガウスの定理」を使えば良い。ガウスの定理を使う方がはるかに簡単に導ける（これは皆さんの課題とする）。地球内部のポテンシャルも求めてみよ。

4. 力学的エネルギー保存則を使い、地球（質量M）から脱出するのに必要な初速度$v_0$ が、$v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ (3-3-15)

であることを示せ。ここで、地球の半径をR、万有引力定数をGとする。また、この式に数値を代入し、$v_0$ [km/s] の値を求めよ。

**（解答例）** 地表(R)での力学的エネルギーEは、v０の初速度で投げ上げたので、$E = \dfrac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - \dfrac{GMm}{R}$ となる。このEは無限遠方でも保存するので、無限遠方での速度をvとすると、無限遠方での力学的エネルギーは $E = \dfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \dfrac{GMm}{\infty} = \dfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ となる。地球のポテンシャルの影響は無限遠方で０になるから、その点で運動エネルギーが0以上（すなわち、動いていることになる)であれば地球の引力圏から脱出できると考えられる． よって、そのための最小の初速度$v_0$は、$E = \dfrac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - \dfrac{GMm}{R} = 0$ より、$v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ が求まる。

数値的に求めると、$v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \sqrt{\dfrac{2\times 6.67\times 10^{-11}(\mathrm{Nm^2/kg})\times 5.98\times 10^{24}\mathrm{kg}}{6.37\times 10^{6}\mathrm{m}}} = 11.2\ \mathrm{km/s}$

（参考）$|F| = \dfrac{GMm}{R^2} = m\left(\dfrac{GM}{R^2}\right) = mg$ と書けば、$v_0 = \sqrt{2gR}$ とも書ける。gは重力加速度。