

1

(1) 0-xyz系での慣性テンソル $\tilde{I}$ の行列

$$I_{xx'} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 2 \cdot m a^2 + 2(2m) a^2 = 6m a^2$$

$$I_{yy'} = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = 6m a^2$$

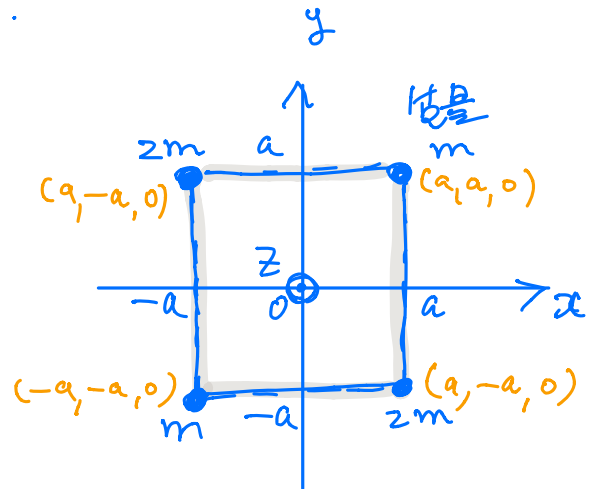
$$I_{zz'} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2 \cdot m(a^2 + a^2) + 2 \cdot (2m)(a^2 + a^2) = 12m a^2$$

$$I_{x'y'} = I_{y'x'} = - \sum m_i (x_i y_i) = - [2 \cdot m a^2 + 2 \cdot 2m(a \cdot (-a))] = 2m a^2$$

$$I_{x'z'} = I_{z'x'} = - \sum m_i (x_i z_i) = 0$$

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = - \sum m_i (y_i z_i) = 0$$

$$\text{よって, } \tilde{I} = \begin{pmatrix} 6m a^2 & 2m a^2 & 0 \\ 2m a^2 & 6m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12m a^2 \end{pmatrix} = 2m a^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) $\tilde{I}$ の正規化

$$\text{固有値 } \lambda = 2m a^2 \lambda' \text{ を求めると, } 2m a^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda' & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda' \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$(3-\lambda')(3-\lambda')(6-\lambda') - (6-\lambda') = 0$$

$$(6-\lambda')[(3-\lambda')^2 - 1] = (6-\lambda')(3-\lambda'-1)(3-\lambda'+1)$$

$$= (6-\lambda')(2-\lambda')(4-\lambda') = 0$$

$$\therefore \lambda' = 2, 4, 6 \rightarrow \lambda = 4m a^2, 8m a^2, 12m a^2$$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 4m a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12m a^2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_{x'} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{固有ベクトル } \lambda = 4m a^2 \text{ に対して, } \begin{pmatrix} 6m a^2 & 2m a^2 & 0 \\ 2m a^2 & 6m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12m a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4m a^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6m a^2 x_1 + 2m a^2 x_2 = 4m a^2 x_1 \rightarrow 3x_1 + x_2 = 2x_1 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ 2m a^2 x_1 + 6m a^2 x_2 = 4m a^2 x_2 \rightarrow x_1 + 3x_2 = 2x_2 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ 12m a^2 x_3 = 4m a^2 x_3 \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \quad \therefore \mathcal{P}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_1=1, x_2=-1, x_3=0}$$

規格化

同様にして $P_2 = -P_1$, $L_2 = W_2 \times P_1 = L_1$

$\therefore L = 2L_1 = 2m\omega a^2 \sin\theta (\sin\theta e_x - \cos\theta e_y)$

(2) $N = \frac{dL}{dt} = \omega \times L = [\omega e_x \times L]$
 $= 2m\omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta (e_x \times (-e_y))$
 $= \underline{-2m\omega^2 a^2 \sin\theta \cos\theta e_z}$

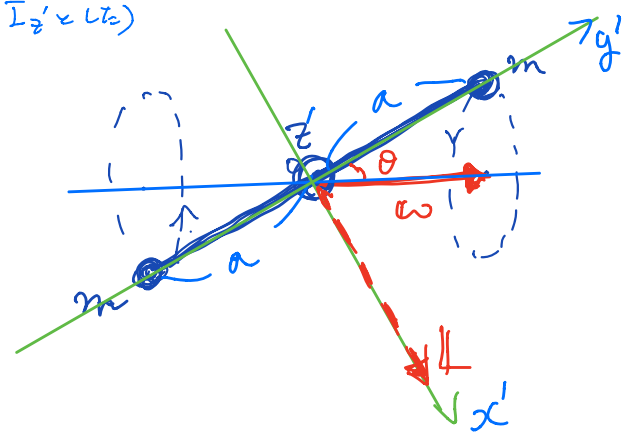
($e_x \times e_x = 0$ に注意)

(3) N は $-e_z$ 方向を向き、 x 軸のまわりを ω で回す
 (棒に垂直で、棒と L と N はすべて x 軸のまわりを ω で回す)

(4) 慣性主軸は すでに図中に示されているので、

$I_x = 2ma^2, I_y = 0, I_z = 2ma^2$

と求まる。(簡単の為、 $I_{xx} \rightarrow I_x, I_{yy} \rightarrow I_y, I_{zz} \rightarrow I_z$ とした)
 (課題) 自分で慣性主軸を求めてみる。



(5) $\omega_x' = \omega \sin\theta, \omega_y' = \omega \cos\theta, \omega_z' = 0$

$O-x'y'z'$ は慣性主軸の座標系なので、

$L' = I_x' \omega_x' e_x' + I_y' \omega_y' e_y' + I_z' \omega_z' e_z'$
 $= (2ma^2)(\omega \sin\theta) e_x'$
 $= 2ma^2 \omega \sin\theta e_x' \rightarrow \underline{L_x' = 2ma^2 \omega \sin\theta, L_y' = L_z' = 0}$

(6) 上の結果より L' は x' 軸と一致したまま棒と一緒に回す。

Eulerの方程式はこの図の時、

$$\begin{cases} I_x' \rightarrow I_{xx} \frac{\delta \omega_x'}{\delta t} + (I_{zz}' - I_{yy}') \omega_y' \omega_z' = N_{x'} & (1) \\ I_y' = 0 \rightarrow I_{yy}' \frac{\delta \omega_y'}{\delta t} + (I_{xx}' - I_{zz}') \omega_z' \omega_x' = N_{y'} & (2) \\ I_z' \rightarrow I_{zz}' \frac{\delta \omega_z'}{\delta t} + (I_{yy}' - I_{xx}') \omega_x' \omega_y' = N_{z'} & (3) \end{cases}$$

ω が一定になるのは $\frac{\delta \omega_x'}{\delta t} = \frac{\delta \omega_y'}{\delta t} = \frac{\delta \omega_z'}{\delta t} = 0$

$\therefore$ ①より $N_{x'} = 0$, ②より $N_{y'} = 0$, ③より $N_{z'} = -I_x' \omega_x' \omega_y'$ であれは良い。

よって $N = -2ma^2 (\omega \sin\theta)(\omega \cos\theta) e_z' = \underline{-2ma^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta (e_z')}$