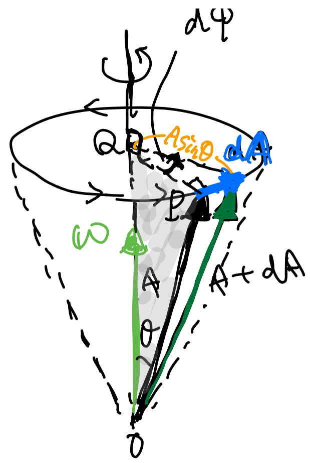
力学ICD演習解答例

演習14

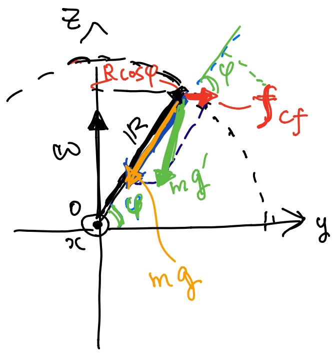
1. dt 秒の間に $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + d\mathbf{A}$ に回転したとする。$d\mathbf{A}$の向きは右図からわかるように（$dt \to 0$ の極限において）$\mathbf{A}$ベクトルの先端が描く円のP点での接線方向になる。また、その大きさは $|d\mathbf{A}| = (A \sin\theta)\, d\phi$. ただし、$\theta, \phi$ は、それぞれ、$\mathbf{A}$ベクトルの軸からの傾き、$\mathbf{A}$ベクトルの回転した角度を表すとする。 $d\mathbf{A}/dt$の向きは、$d\mathbf{A}$の向きと同じでP点での円の接線方向、その大きさは、$|d\mathbf{A}/dt| = (A \sin\theta)\, d\phi/dt = (A\sin\theta)\, \omega$ となる。一方、$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ は向きがΔOPQ の面に垂直、すなわち、P点での円の接線方向となり $d\mathbf{A}/dt$の向きと一致する。また、$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}| = \omega A \sin\theta$ なので $|d\mathbf{A}/dt|$に等しい。よって、$d\mathbf{A}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$が証明された。



2.

式(9-2-13)より $|f_{cf}| = m r_{\perp} \omega^2 = m(R\cos\varphi)\omega^2$

赤道では $\varphi = 0$ なので $|f_{cf}|$ は $m\omega^2 R$ となり最大。また重力とは逆向きである。



よって赤道での遠心力の加速度は $|f_{cf}|/m = \underline{\underline{\omega^2 R}}$

$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} = 7.27\times10^{-5}$ (rad/s)

$R = 6371\,\mathrm{km} = 6.37\times10^{6}$ (m) なので

$\omega^2 R = 3.37\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$ これがgの補正値となる。

重力加速度は $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ なので赤道での遠心力による補正値は

gに対して $\frac{3.37\times10^{-2}}{9.8} = 3.44\times10^{-3} \simeq 1/300\ (= 3.33\times10^{-3})$

3.

$\boxed{3}$ 体重＝重力であることに注意する

赤道では体重は $mg' = mg - m\omega^2 R$

北極での体重は mg （遠心力＝0）

$\therefore\ mg = mg'\cdot\frac{g}{g'} = 50\,\mathrm{kg}\times\frac{g}{g'}$

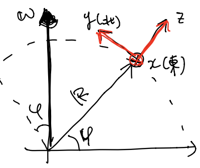
前問より $g' = g - \omega^2 R = (9.8 - 0.0337)\,\mathrm{m/s^2} = 9.77\,\mathrm{m/s^2}$

よって北極での体重 $mg = 50\,\mathrm{kg}\times\frac{9.80}{9.77} = 50.15\ \mathrm{kg}$

2/2

4 地表近くで v' で運動している物体のコリオリの力は式(9-3-4) $f = -2m\omega\times v'$ で表わされる。今、下の図)のように地球中心から R の位置を新たな基準とする座標の軸を設定する。すなわち、x の正の方向を東、y の正の方向を北、z の正の方向を鉛直正の方向とする。この時、$\omega = (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$ となる。

質点が地表を運動する時、$v_z = 0$ なので $f_c = 2m\omega(\sin\varphi\cdot v_y, -\sin\varphi\cdot v_x, \cos\varphi\cdot v_x)$



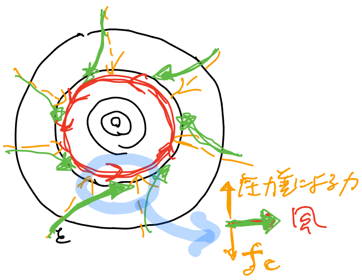
となるから 北方向に v で進む時、$v = (0, v, 0)$ を代入すると、

$$f_c = (2m\omega\sin\varphi\cdot v, 0, 0).$$

f_c は x 成分しかないので北半球($\varphi>0$)では東向きにコリオリの力が働らく

5 台風(低気圧)の等圧線が右図のようだったとする 風は高気圧から低気圧に向かって吹き込む(図の点線の矢印) 今、コリオリの力は北半球($\varphi>0$)では v の方向に対し、右側に曲がるように働らくので、実線の矢印のように方向を変える。

この段階で圧力差により中心部に吹きこもうとするが、コリオリ力と力がつり合い、図のように反時計回りに回転する渦ができる



6 (1) 補足図の左中央の図で①の方向に振れるとき f_c は右向きに働らく。振巾が最大となって停止し反対方向に振れる時(②)、f_c は①と逆向きに働らく。以後、同じような事が③→④→… と続くので振動面は回転する。

(2) 9.3.3節で周期は $T = 2\pi/\omega\sin\varphi$ と示されている。$\varphi = 90^\circ$ (北極) の時、$\sin\varphi = 1$ と最大となるから T は最小値 $\frac{2\pi}{\omega}$ となる。(南極では反対方向に回転)。今、地球の ω は $2\pi/$日 であるから $T = 1$ 日 or $24h$)

(3) 赤道では $\varphi = 0$ なので $T = \infty$、すなわち、回転しない。(回転の角速度 $\Omega = -\omega\sin\varphi = 0$)

(4) 東京の $\varphi = 35.7^\circ \longrightarrow \sin\varphi = 0.584 \longrightarrow T = 1.71$ 日($41h\ 6m$)

7 (1) 鉛直方向の運動では $v_x = v_y = 0$, $v_z \neq 0$. これを $f_c = -2m(\omega\times v)$ の式に入れると、$f_c = (-2m\omega\cos\varphi\cdot v_z, 0, 0)$ となる。今、投げ上げた時は、$v_z > 0$ なので f_c は x 軸負の方向(西方向)に働らく。落下の時は $v_z < 0$ なので x 軸正の方向(東方向)に働らく。

(2) $t = 0$ で $(0, 0, h)$ から自由落下。

$$\begin{cases} g' = g \text{ として } m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg, \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2m\omega\cos\varphi\cdot\underbrace{\dfrac{dz}{dt}}_{v_z} \end{cases}$$

(3) $z = h - \frac{1}{2}gt^2$, $\frac{dz}{dt} = -gt$ なので、$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\cos\varphi\cdot(-gt)$

これを2回積分すると $x = \frac{1}{3}\omega g t^3\cos\varphi$

落下するまでの時間は $h = \frac{1}{2}g{t_1}^2$ なので $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

これを代入すると $x = \frac{1}{3}\omega\cos\varphi\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$ となる。

(4) $\omega = 7.27\times10^{-5}$ rad/sec, $\alpha = 45^\circ$, $h \fallingdotseq 100$ m を代入して計算すると $x \sim 1.5$ cm となる