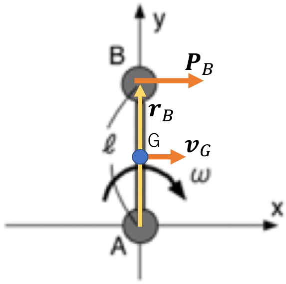
力学ICD演習解答例

演習11

1. 質量の無視できる長さ l の棒の両端に質量 m の物体A, B がついている。Aは原点に固定され、Bがそのまわりを角速度 ω で時計方向に回転している。図のように、B が y 軸上に来た時、Aを自由にした。この時間を$t=0$とする。以下の設問に答えよ。ただし、重力は無視する。また、物体の大きさは十分小さいとする。



1）$t=0$ での重心の速度 $\mathbf{v}_G$ はいくらか。

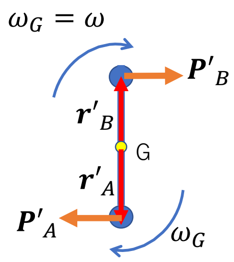
（**解答例**）$t=0$ の時、重心の座標は$(0, l/2)$ なので、重心の速度は、$\mathbf{v}_G = \dfrac{1}{2}\, l\omega\, \mathbf{e}_x$.

ここで、$\mathbf{e}_x$ は x 軸方向の単位ベクトル。（大きさ: 1/2 $l\omega$、向き:　x軸正の方向）

2）$t=0$ での全運動量 $\mathbf{P}_{tot}$ はいくらか。（**解答例**）$\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = 0 + m(l\omega)\mathbf{e}_x$.（大きさ:$ml\omega$、向き:x軸正の方向）

（**別解**）式(7-1-13)より $\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_G$ なので、1)の結果を使い、$\mathbf{P}_G = (2m)\mathbf{v}_G = 2m[(1/2)l\omega\,\mathbf{e}_x] = ml\omega\,\mathbf{e}_x$

3）$t=0$ での原点のまわりの全角運動量 $\mathbf{L}_{tot}$ はいくらか。



（**解答例**）$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B = 0 + (\mathbf{r}_B \times \mathbf{p}_B) = l\mathbf{e}_y \times (ml\omega)\mathbf{e}_x = ml^2\omega(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x) = ml^2\omega(-\mathbf{e}_z)$.

大きさは$ml^2\omega$、向きは$-\mathbf{e}_z$ 方向（xy平面に垂直で -z 軸方向（紙面に対して⊗））

4）$t=0$ での重心のまわりの全角運動量 $\mathbf{L}'_{tot}$ はいくらか。

（**解答例**）$\mathbf{L}'_{tot} = \mathbf{L}'_A + \mathbf{L}'_B$. 重心は原点の周りを$\omega$で回るが、重心に乗って見れば、Aも B も重心の周りをωで回っているように見える。（右図を参照せよ）

よって、重心の周りの角速度は $\omega_G = \omega$ なので、$t=0$ の時は、

$$\mathbf{L}'_{tot} = \mathbf{L}'_A + \mathbf{L}'_B = (\mathbf{r}'_A \times \mathbf{p}'_A) + (\mathbf{r}'_B \times \mathbf{p}'_B) = [(l/2)(-\mathbf{e}_y) \times m(l/2)\omega_G(-\mathbf{e}_x)] + [(l/2)\mathbf{e}_y \times m(l/2)\omega_G\mathbf{e}_x] = 2 \times (1/4)ml^2\omega(-\mathbf{e}_z)$$

大きさは $(1/2)ml^2\omega$. 向きは$-\mathbf{e}_z$ 方向（xy平面に垂直で -z 軸方向（紙面に対して⊗））

5）$t=0$ での重心の原点に関する全角運動量 $\mathbf{L}_G$ はいくらか。

（**解答例**）$\mathbf{L}_G = \mathbf{r}_G \times 2m\mathbf{v}_G = [(l/2)\mathbf{e}_y \times 2m(l/2)\omega\,\mathbf{e}_x] = (1/2)ml^2\omega(-\mathbf{e}_z)$. 大きさは $(1/2)ml^2\omega$. 向きは$-\mathbf{e}_z$ 方向（xy平面に垂直で -z 軸方向（紙面に対して⊗））

6）$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'_{tot}$ を確かめよ。

（**解答例**）$\mathbf{L}_G + \mathbf{L}'_{tot} = (1/2)ml^2\omega(-\mathbf{e}_z) + (1/2)ml^2\omega(-\mathbf{e}_z) = ml^2\omega(-\mathbf{e}_z) = \mathbf{L}_{tot}$.

7）この後、この亜鈴の重心の速度はいくらか。

（**解答例**）外力＝０なので重心はx軸正の方向へ$\mathbf{v}_G$ で等速直線運動をする。$\mathbf{v}_G$ は $t=0$ から変化しないので常に $\mathbf{v}_G = (1/2)\, l\omega\,\mathbf{e}_x$.

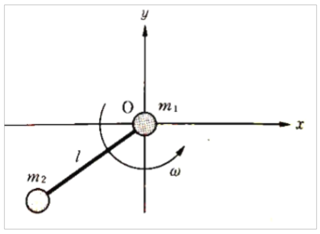
8）また、重心のまわりの角速度 ω_G はいくらか。

（**解答例**）7-3-5節では、外力が無い時は重心の周りの全角運動量も保存することが示された。よって、$t=0$での $\mathbf{L}'_{tot} = (1/2)ml^2\omega(-\mathbf{e}_z)$ は $t>0$ でも変化しない。これから ω_G は $t>0$ でも ω のまま変化しない

9）$t=\pi/\omega$ における重心、およびBの位置の x, y 座標を求めよ。

（**解答例**）このダンベルは、結局ωで重心の周りを時計まわりに回転しながら、その重心は $(1/2)\ l\omega$ の速さでx軸の正の方向へ等速直線運動する。重心のx座標 $((1/2)\ l\omega)t = ((1/2)\ l\omega)(\pi/\omega) = (1/2)\ l\pi$、y 座標は $(1/2)\ l$ のまま。Bは 問題に与えられた図の状態から $\omega t = \omega(\pi/\omega) = \pi$ だけ回転する。この時のy座標は０。よって、$t=\pi/\omega$ の Bの座標は $(\frac{1}{2}l\pi, 0)$.

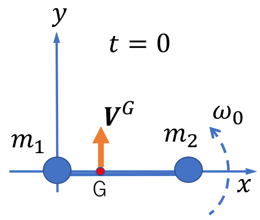
2. 図のように質量 m_1, m_2 の質点１と質点２を重さの無い長さ l のひもで結んだダンベルを考える。m_1 を持ってひもを角速度ω_0で回転させ m_2 が水平になった瞬間に m_1を放し、投げ上げた。ひもはたるむことが無いとしてダンベルの運動を調べる。



１）投げ出す瞬間 $t = 0$ のダンベルの重心の座標 $X_G(0), Y_G(0)$を求めよ。

（解答例） $X_G(0) = \dfrac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad Y_G(0) = 0$

2）投げ出す瞬間 $t = 0$ のダンベルの重心の速度 $V_X^G(0), V_Y^G(0)$を求めよ。



（解答例） $t = 0$ の時（右図）、重心の速度のx成分 $V_X^G(0) = 0$、y成分は

$V_Y^G(0) = X_G(0)\omega_0 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega_0$

3）投げ出した後、t 秒後の重心の位置 $X_G(t), Y_G(t)$ を求めよ。

（解答例） 重心の運動方程式は $(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}^{ex}_{tot}$. これを成分に分けると、

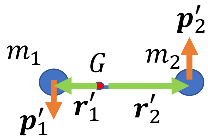
(x成分) $(m_1 + m_2)\ddot{X}_G = F_x^{ex} = 0$,　(y成分) $(m_1 + m_2)\ddot{Y}_G = F_y^{ex} = -(m_1 + m_2)g$. x成分の方程式はすぐ解けて、$\dot{X}_G = V_X^G(t) =$ 一定.

よって、t=0の値と同じになるので、$\dot{X}_G(t) = \dot{X}_G(0) = V_X^G(0) = 0$. したがって$X_G(t) = X_G(0) = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l$. y成分は、$\ddot{Y}_G = -g$ の方程式を解けば良い。これは普通の投げ上げ運動と同じであるから、$Y_G(t) = Y_G(0) + V_Y^G(0)\ t - (1/2)g t^2$.

$\therefore Y_G(t) = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega_0\ t - (1/2) g t^2$

4）投げ出たし後 t 秒後の重心の速度 $V_X^G(t), V_Y^G(t)$を求めよ。

（解答例） $V_X^G(t) = 0$, $V_Y^G(t) = V_Y^G(0) - g t = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega_0 - g t$



5）重心のまわりの回転の角速度を求めよ。**（解答例）** $t = 0$ の重心の周りの角速度（重心に乗って周りの質点の回転を見たときの角速度）は ω_0 になる。これは $t > 0$でも変化せず ω_0. のままである。この理由を以下に述べる。まず、重力が作る重心の周りの力のモーメントは合計ゼロになる。それは、竿ばかりと同じで、重心を基準にすると、質点１と質点2は互いに逆向きの力のモーメント（その大きさは同じ）を持つからである（つまり、釣り合う条件になっている）。こうして、外力の力のモーメントの総和はゼロなので、重心の周りの全角運動量は保存する（（7-3-19)式参照）。重心の周りの角運動量は、質点１と重心の距離をl_1、質点2と重心の距離をl_2 とおくと、質点１に関しては、$\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 = l_1(m_1 l_1 \omega_0)(\mathbf{e}_z)$、質点２に関しては

$\mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 = l_2(m_2 l_2 \omega_0)(\mathbf{e}_z)$ なので、その合計は$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\omega_0(\mathbf{e}_z)$となる。これが一定なので、$\omega_0$は時間変化しない。よって、 $t > 0$ でもω_0のまま回転する。

6）質点１を持って回転しているときの運動エネルギー T を求めよ。

（解答例） $t < 0$ での全運動エネルギーは、質点１が動かないので、質点２の運動エネルギーのみになる。なので、

$T = 0 + (1/2)m_2(l\omega_0)^2 = (1/2)m_2 l^2 \omega_0^2$

7）質点１を放した瞬間の、重心の運動エネルギーT_G, 重心の周りの回転の運動エネルギーT'を求めよ。

（解答例）　$T_G = (1/2)(m_1 + m_2)(X_G(0)\omega_0)^2 = (1/2)(m_1 + m_2)(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2 l^2 \omega_0^2 = (1/2)\dfrac{l^2 m_2^2}{m_1 + m_2}\omega_0^2$

$t = 0$ での重心の周りの全運動エネルギーは

$T' = (1/2)m_1(l_1\omega_0)^2 + (1/2)m_2(l_2\omega_0)^2 = (1/2)m_1[(\dfrac{l m_2}{m_1 + m_2})\omega_0]^2 + (1/2)m_2[(\dfrac{l m_1}{m_1 + m_2})\omega_0]^2 = (1/2)(\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}) l^2 \omega_0^2$

（参考）$T_G + T' = T$ となる。確かめよ。

8）重心が最高点に達したときの位置エネルギーUを求めよ。

（解答例） 最高点に達するまでの時間は$V_Y^G(t) = 0$ となる時間　(t'とする) なので、$V_Y^G(0) - g t' = 0$ より求まり、

$t' = (l/g)(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})\omega_0$.　最高点は、$Y_G(t') = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega_0\ t' - (1/2) g t'^2 = (1/2)(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2 \dfrac{l^2}{g}\omega_0^2$.

よって重心の位置エネルギーは、$(m_1 + m_2) g Y_G(t') = (1/2)(\dfrac{m_2^2}{m_1 + m_2}) l^2 \omega_0^2$ となる.

9) この問題に関してエネルギーの保存則を論ぜよ。（**解答例**）上の結果より、$t=0$ での重心の運動エネルギーT_Gと重心が最高点に達したときの位置エネルギーUは等しい事がわかる。よって、重心の運動エネルギー＋重心の位置エネルギーは一定であり、また、回転のエネルギー T' は常に一定。これらを全て足したものは$t=0$ での運動エネルギー T に等しい。